

Kőhegyi Gergely

A KIRÁLYNŐ ÉS A HERCEG

A KÖZGAZDASÁGTAN MATEMATIZÁLÓDÁSA
A XX. SZÁZAD ELSŐ FELÉBEN



BEVEZETÉS

Mikor, hogyan és miért vált a közgazdaságtan matematikai tudománnyá? A kérdésre egyetlen tudománytörténeti magyarázat sem ad igazán megnyugtató választ. Ugyanakkor az elmélet-történeti irodalomban számos, egymásnak gyakran ellentmondó hipotézissel és koncepcióval találkozhatunk. Van, aki szerint a közgazdaságtan már az ókorban is matematikai tudomány volt, és van, aki szerint ma sem az. Vagy legalábbis nem kellene, hogy az legyen.

Természetesen a történeti magyarázatok nagymértékben függenek attól, hogy mit is tekintünk pontosan matematikai tudománynak. Vajon a statisztikai adatok felhasználása, a számpéldák és sémák, a szigorú deduktív logikát követő érvelés, a szimbólummanipuláció és függvényhasználat, vagy a topológiai módszerek alkalmazása jelenti a kulcsmozzanatot? Választásunktól függően nagyon sokféle válasz adható az eredeti kérdésre, és ezek a válaszok gyökeresen eltérő történeti magyarázatokat vonhatnak maguk után.

Már maga az időbeli lehatárolás sem magától értetődő, hiszen számos korai szerző (pl. W. Petty, D. Bernoulli, vagy valamivel később az úgynevezett francia mérnökök) törekedett arra, hogy közgazdasági gondolatait a matematika nyelvén fogalmazza meg, azonban az elmélet-történeti szakirodalomban nagyjából egyetértés mutatkozik abban, hogy a matematikai tudománnyá válás igénye a marginalista forradalom korában fogalmazódott meg, és a XX. század első felére tehető, hogy a társadalomtudományok hercege és a tudományok királynője végleg egymásra talált.

Ebben a tanulmányban azt az időszakot kíséreljük meg röviden áttekinteni, amely az 1930-as évek elejétől az 1950-es évek végéig terjedt. Ez alatt az idő alatt a közgazdaságtan jellege jelentősen megváltozott. A XX. század közepétől gyakorlatilag elvárásként, sőt gyakran szűrőként jelentkezik a legfontosabb közgazdasági folyóiratoknál a matematikai eszközhasználat. A legnagyobb szakmai elismeréseket, beleértve a Nobel-díjat is, többnyire matematikai alapokon nyugvó eredményekért ítelték oda. A legrangosabb szakmai testületek explicit módon is zászlajukra tűzték a matematika és statisztika eszköztárának terjesztését a közgazdaságtan területén belül, és már egy bevezető jellegű közgazdasági képzés sem képzelhető el matematikai alapozás nélkül. A XIX. század végén és a XX. század elején azonban még egészen más volt a helyzet. A változás folyamata gyakorlatilag elválaszthatatlan az általános egyensúlyelmélet XX. századi történetétől, ezért e tanulmány gerincét is elsősorban ennek a problémakörnek a tanulmányozása adja.

A BÉCSI MATEMATIKAI KOLLOKVIUM

A XX. század első harmadában jelentős kritikák érték a közgazdaságtan főáramának elméleteit a gazdaságpolitikai alkalmazásoktól való túlzott eltávolodásuk miatt, ami a szakma hírnevének erodálódásához, valamint a legfontosabb kérdések és a módszertan újragondolásához vezetett (Bekker 2000a), háttérbe szorítva ezzel a „tiszta elmélet” csiszolásával foglalkozó szerzőket. Néhány kutató azonban továbbra is a marginalista forradalom korában felmerült kérdések tisztázásának szentelte idejét, ami nem bizonyult felesleges időtöltésnek, mivel a keynesi forradalom után a közgazdasági elméletek megfogalmazásában ismét a matematikáé lett a főszerep. Ezek a kutatók gyakran kifejezetten a matematikai problémát látták a közgazdasági kérdésfeltevés mögött, ezért a közgazdaságtan formálásán kívül a matematika tudományának változását is jelentős mértékben befolyásolták.

Az egyik ilyen érdeklődési fókusszal rendelkező szellemi központ a Karl Menger (1902–1985) (az osztrák iskolát megalapító Carl Menger fia) által Bécsben megszervezett Matematikai Kollokvium volt. A Kollokvium résztvevőinek szemléletmódját döntően háromféle eszmei áramlat határozta meg: (1) a neoklasszikus közgazdaságtan lausanne-i és osztrák iskolájának eredményei és célkitűzései; (2) a különböző matematikafilozófiai koncepciók keveréke, elsősorban az úgynevezett Hilbert-program; (3) a XX. századi tudományos gondolkodásra, illetve a tudományokról való gondolkodásra óriási hatást gyakorló Bécsi Kör tudományfilozófiája. Mivel az egyes szerzők motivációinak feltárásakor kevés szó esik ezekről, bár a folyamat megértéséhez nélkülözhetetlen az ismeretük, a következőkben a teljesség igénye nélkül röviden ismertetjük e szellemi áramlatok legfontosabb vonásait:

NEOKLASSZIKUS KÖZGAZDASÁGTAN

A XIX. század második felében a gazdaság működéséről szóló elméletek gyökeresen átalakultak. Az addig „uralkodóknak” számító, később klasszikus politikai gazdaságtannak nevezett eszmerendszert egy alapkérdéseit és módszertanát tekintve teljesen új irányzat, a neoklasszikus közgazdasági elmélet váltotta fel. A klasszikus politikai gazdaságtan főbb képviselői (D. Hume, A. Smith, T. Malthus, D. Ricardo, és részben J. S. Mill), bár sok kérdésben nem értettek egyet, döntően mindannyian makrogazdasági jellegű kérdésekkel foglalkoztak; fontos missziójuknak tekintették, hogy elméletalapú gazdaságpolitikai ajánlásokat tegyenek, így munkáikban igen erős normatív megállapítások találhatók. További közös jellemzőjük, hogy az érték fogalmát valamiféle szubsztanciális munkaértékként képezték el.

Ezzel szemben a neoklasszikus elmélet megalkotói a gazdasági jelenségek mikroszinten történő megalapozására koncentráltak, azaz a módszertani individualizmus metodológiai elveit követték. Elhatárolták magukat a gazdaságpolitikai alkalmazásoktól, vagyis egyfajta pozitív megközelítés jellemezte őket, és egy szűkített utilitarista értékelméletet posztuláltak. A fentiekén kívül igen szembetűnő különbség még a kifejtés módjának megváltozása is, mivel a klasszikus politikai gazdaságtannal ellentétben a neoklasszikusok gondolataikat egy jóval elvontabb kategóriarendszerben igyekeztek megfogalmazni (Bekker 2000b).

A két gondolatrendszer nagyfokú különbözősége és az átmeneti állapot rövidsége miatt gyakran paradigmaváltásként tekintenek az 1871–74-es időszakra, amelyet a „hirtelen váltás” hangsúlyozása végett „marginalista forradalomnak” neveznek. A forradalom azonban nem összehangolt hadműveleteken alapult. Sőt a három kulcsszereplő (W. S. Jevons, L. Walras, C. Menger) három különböző helyen, három különböző nyelven jelentette meg könyvét (Jevons 1871; Menger [1871] 1881; Walras [1874] 1900) anélkül, hogy tudott volna egymásról.

Közkeletű nézet, hogy a három mű tartalma nagyjából ugyanaz: maga a marginalista-neoklasszikus alapvetés. A könyvekbe azonban elegendő belelapozni ahhoz, hogy lássuk, ez egyáltalán nem így van. Jevons elsősorban a fogyasztás és a termelés optimumát elemzi differenciálszámítási keretben, Walras a termékek és termelési tényezők piacainak összekapcsolódására helyezi a hangsúlyt, és differenciálszámítás helyett csupán egyenletrendszereket alkalmaz (amelyben a megoldás létezését az egyenletek és ismeretlenek számának egyezésével igazolja), míg Menger egyáltalán nem használ matematikát, viszont igen szigorú logikai struktúrát épít fel az érték utilitarista alapokon való megragadásával, valamint a módszertani individualizmus következetes alkalmazásával.

Mindhárom kulcsszereplő szociológiai értelemben is iskolát teremtett. Jevons leghíresebb követői – Edgeworth és Marshall – a cambridge-i iskola, Walras tanítványa – Pareto – a lausanne-i iskola, a mengeri hagyományt folytató Wieser és Mises pedig az osztrák iskola jeles képviselői voltak.

Mind a marginalista triumvirátus tagjainak, mind követőiknek igen nagy fejlődést okozott metodológiai szempontból az utilitarista alapú érték meghatározása. Ez ugyanis, akár a Jevons-féle „hasznosság végső fokára”, akár a Walras-féle rareté² (szűkösség) fogalmára, akár a mengeri gondolatmenetre alapozzuk, egy közvetlenül mérhetetlen és értelmezhetetlen dimenziójú kvantitatív mennyiséget jelöl, ami a kor pozitivistá módszertanát

1 Az utolsó elfogyasztott egység által okozott hasznosságnövekedés.

2 Egy olyan függvény, amely konkrét szituációban konkrét személy esetén megmutatja, hogy a jószág bizonyos mennyiségét az adott személy hogyan értékeli.

tekintve is gyenge pontja volt az elméletnek. A későbbiekben mindez számos termékeny módszertani vitát és megoldási kísérletet generált, ami a neoklasszikus elméletek újragondolását és módosítását eredményezte.

A klasszikus-neoklasszikus átmenet történeti magyarázatait illetően távolról sincs egyetértés a közgazdasági elméletek történetével foglalkozó kutatók között. Blaug (1978) szerint például az összes neoklasszikus fogalom és módszer kezdeménye megtalálható a klasszikus „elődöknél”, így „forradalomról” semmiképpen sem beszélhetünk, sőt a két irányzat között egyfajta kontinuitás figyelhető meg. Mirowski (1984) azonban a diszkontinuitás mellett érvel, és elsősorban a matematikai módszerek használatában látja a két gondolatrendszer közti különbséget. Valóban, mind az utilitarista értékfogalom beépítésének, mind a normatív tényezők leválasztásának irányába történtek „próbálkozások” a marginalista forradalmat megelőzően, valamint a mikroszintű kérdések is helyenként fontos szerephez jutottak, azonban a közgazdasági elmélet átfogó matematikai formalizálására korábban kísérlet sem történt.

MATEMATIKAFILOZÓFIAI KONCEPCIÓK A SZÁZADFORDULÓN

A XIX. század második felére jelentősen megváltoztak a matematikai ismeretek eredetével és ennek kapcsán általában a matematika tárgyával és módszerével kapcsolatos attitűdök is. Ehhez a legnagyobb lökést a sokak szerint Bolyai és Lobacsevszkij munkássága nyomán kialakuló nemeuklideszi geometriákkal kapcsolatos kutatások adták, amelyek – egyrészt a matematikai objektumok szemlélettel való viszonyán, másrészt önmagában az új terület létezésén keresztül – a hagyományos nézetek jelentős újragondolására készítettek. Ha a geometria nem az egyetlen és számunkra is adott Tér törvényszerűségeit taglalja, hiszen többféle geometria is lehetséges, és ráadásul az aritmetika és a számfogalom viszonyával kapcsolatban is hasonló problémák merülnek fel, akkor nehéz válaszolni arra a kérdésre, hogy tulajdonképpen mit is jelent az a kifejezés, hogy „derékszög”, vagy akár az, hogy „kettő”, bonyolultabb matematikai fogalmak jelentéséről nem is beszélve. Ugyanakkor a matematikusok számára a lehetőségek tárháza jelentősen kibővült a köznapi szemlélettől való elszakadással, ami számos fontos matematikai eredmény megfogalmazását tette lehetővé. Mindezek miatt a matematika virágkorának is nevezik a XIX. századot. Cauchy és Weierstrass munkássága végleg tisztázta a több mint 200 éve kísértő – ugyanakkor a fizikában előforduló differenciálszámítási problémák megoldásánál sikerrel alkalmazott – „végtelenül kicsiny változások” homályos fogalmát, Georg Cantor lefektette a matematika összes területét megalapozó (naív) halmazelmélet alapjait, Gottlob Frege, Richard Dedekind és Giuseppe Peano pedig az aritmetika alapfogalmait

logikai objektumokra vezették vissza. A fenti elméletek kialakításánál fontos szerepet játszott, hogy a definíciók szigorú, egymásra épülő rendje kiküszöböli az esetlegességeket és megőrzi a matematikai állítások végső igazságát, amelyet többé nem a szemlélet és nem is valamiféle harmadik világban létező ideális entitással való kapcsolat garantál.

Ezekben a szigorú deduktív rendszerekben azonban többen fogalmi ellentmondásokat véltek felfedezni, amelyek részben már az ókorban is ismert paradoxonokon alapulnak. Az ilyen típusú ellentmondások okozta problémák kicsúcsosodása az úgynevezett Russel-paradoxon „felfedezése” volt 1901-ben (Russel [1903] 1996), amely ismét alapjaiban változtatta meg a matematikáról való gondolkodást. A paradoxon azt a kérdést feszegeti, hogy az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza lehet-e saját magának eleme? Nyilván mindkét lehetséges válasz ellentmondásra vezet.³

Ezek az ellentmondások arra ösztönözték a századforduló jeles matematikusait és filozófusait, hogy a matematika paradoxonoktól mentes, végérvényes megalapozását nyújtsák, bár a különböző irányzatok eltérő filozófiai alapelvekre építve próbálták ezt megtenni. Az egyik ilyen irányzat a Frege által útjára indított, de Bertrand Russel munkássága nyomán kibontakozó, és a Bécsi Kör meghatározó személyiségeként ismert Rudolf Carnap által is képviselt *logícizmus* volt, amely minden matematikai fogalmat és állítást a tisztán szintaktikai úton felépített logikára kívánt alapozni. A másik ilyen irányzat az igen nagy hatású osztrák matematikus, David Hilbert programja, amelynek egyik értelmezése szerint a matematikai elméleteket modern értelemben vett, szigorú, axiomatikus rendszerben kell kifejtetni, ahol az axiómák tulajdonképpen jelentés nélküli szimbólumsorozatok, amelyekből kiindulva az elmélet összes tétele konzisztens módon bizonyítható. Azt azonban semmi sem garantálja, hogy az axiómákban szereplő fogalmak valóban „léteznek”, és különösen azt nem, hogy egyértelműek (pl. a vektorterek axiómáinak többféle interpretációja is lehetséges),⁴ ezért az axiómák, valamint a belőlük levezetett tételek valódi „igazsága” is kétséges, csupán a rendszer konzisztenciájára építhetünk. Ebből az értelmezésből kiindulva szokás a Hilbert-programot *formalista program*ként is aposztrofálni, bár

3 Egy kissé közérthetőbb formára átfogalmazva, ha egy laktanya szabályzata szerint a borbély csak és kizárólag azokat a katonákat borotválhatja, akik maguk nem borotválkoznak, akkor borotválhatja-e a szabályzat szerint saját magát? Vagy Karinthy szavaival élve: „Ohó, álljunk csak meg! Ön azt mondja, a rögeszmém, hogy őrült vagyok. De hiszen tényleg az vagyok, az imént mondta. De hiszen akkor ez nem rögeszme, akkor az egy logikus gondolat. Tehát nincs rögeszmém. Tehát mégse vagyok őrült. Tehát csak rögeszme, hogy őrült vagyok, tehát rögeszmém van, tehát őrült vagyok, tehát igazam van, tehát nem vagyok őrült. Mégiscsak gyönyörű dolog a tudomány!” (Karinthy Frigyes: *Őrült sike-rem a tébolydában*. 1996: 47)

4 Az axiómákat a rendezett szám n -esek és az irányított szakaszok is egyaránt kielégítik.

– Hilbertnek a matematika egyéb területeit érintő nézeteit alapul véve – ez az elnevezés nem feltétlenül helytálló (Csaba 2003). A harmadik irányzat a holland Leutzen Egbertus Jan Brouwer nevével fémjelvezhető *intuicionizmus*, amely szerint a modern matematika problémái éppen abból fakadnak, hogy fogalmi eltávolodtak a szemlélettől, miközben ezekre az objektumokra úgy kellene tekintenünk, mint egy ideális matematikus elméjének konstrukcióira. Azok az objektumok pedig, amelyeket nem konstruálunk meg, vagy esetleg nem is lehet megkonstruálni, nem rendelkeznek jelentéssel, és ezért nincs helyük a modern matematikában. Ezen az alapon kritizálta Brouwer az indirekt bizonyítások módszerét (szerinte csak a konstruktív bizonyítás elfogadható), és javasolta egyfajta szigorúbb matematikai logika bevezetését.

A BÉCSI KÖR

A matematika mellett sok gondolkodó szemében a XX. század elejére a természet- és társadalomtudományok is egyfajta válságba kerültek. Miközben számos igen jelentős és sikeres tudományos elmélet bontakozott ki erre a korra, ezek gyakran szembekerültek a XIX. században lefektetett metodológiai normákkal. Különösen „fenyegető” volt a helyzet az ebben a korban a tudományok mintaképeként tekintett fizika területén, ahol az elektrodinamika, a relativitáselmélet és különösen a kvantummechanika megjelenésével igencsak elszaporodtak az olyan típusú magyarázatok, amelyek a tapasztalattól és sokszor mindenféle szemlélettől meglehetősen távol került fogalmakra építettek, ráadásul ezek közül bizonyos – egymással határos területeken lévő – elméletek összeegyeztethetetlennek bizonyultak. Mindez arra sarkallta a kor néhány nagy formátumú természet- és társadalomtudósát, matematikusát és filozófusát, hogy komoly energiákat fordítsanak a fenti problémák tisztázására. Ennek szellemében alakult meg a Bécsi Kkör. A Kőr hivatalos megalakulása Moritz Schlick fizikus és filozófus névleges vezetésével az 1920-as évek első felére tehető, de az alapítók között számon tartott Hans Hahn és Philipp Frank matematikusok (mindkettő David Hilbert tanítványa) valamint Otto Neurath szociológus és közgazdász már 1908-tól folytattak informális megbeszéléseket a témakörben. A társaság hivatalos kiáltványa (*Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis*) Hahn, Neurath és Carnap megfogalmazásában, aki 1926-ban csatlakozott a körhöz, 1929-ben jelent meg. A náci párt németországi hatalomra kerüléséig, amely ausztriai befolyásán keresztül gyakorlatilag a Kőr fennállásának végét jelentette – humanista nézeteik miatt a meghatározó személyiségek nagy része az Egyesült Államokba emigrált, illetve Hahn és Schlick hamarosan elhunytak –, számos ismert tudós és filozófus látogatott el a heti rendszerességgel megtartott összejövetelekre, és töltött el több vagy kevesebb időt ennek kedvéért Bécsben, amely

város a társaság működésének köszönhetően a világ tudományos életének meghatározó központjává vált.

A Bécsi Kör kiáltványában (1929) megfogalmazott végső célkitűzés az úgynevezett „egységes tudomány” megvalósítása volt, amelyben a különböző tudományos elméletek összehangoltan kapnak helyet, valamint az egyes fogalmak jelentése és azok kapcsolata más tudományos elméletek fogalmaival világosan tisztázott. Ez a törekvés egyrészt megoldja a tudományos elméletek széttördezetségének problémáját, amely akkoriban, mint azt már említettük, a természettudományok területén is jellemző volt, másrészt megóv a kiáltvány szerint egyre inkább fenyegető metafizikai és teológiai jellegű eszmefuttatásoktól, amelyek a tudományokba is kezdenek „beszivárogni”, és amelyek a homályos jelentéssel rendelkező kvázitudományos fogalmak keletkezésének melegágyát jelentik. A program *empirista-pozitivist*a, azaz minden tudományos tudás végső forrásaként a tapasztalatot jelöli meg, valamint *logikai elemzésen alapul*, azaz az elméletek belső szerkezete egy modern értelemben vett axiomatikus rendszerként, illetve az axiómákból szigorúan logikai úton levezetett következtetéseként adott. Egy tudományos fogalom tehát kétféleképpen nyerheti el jelentését: (1) egy mindenki számára hozzáférhető tapasztalati tényre (pl. egy kísérletre) referál, azaz megfigyelhető minőség, vagy (jobb esetben) mérhető mennyiség; (2) logikai úton visszavezethető olyan fogalmakra, amelyek közvetlenül a tapasztalatra vonatkoznak az (1) pontnak megfelelően. Tudományos igényű állításnak pedig csak az tekinthető, amelyben a fent megadott módon nyert jelentéssel rendelkező fogalmak szerepelnek.

A kiáltvány ezenkívül részletezi azokat a tudományterületeket, amelyeken az alapok tisztázását a programalkotók szükségesnek tartják, és amelyekre a kör tagjainak kutatásai vonatkoznak. Az aritmetika, a fizika, a geometria, a biológia és a pszichológia mellett egy rövid bekezdést szánnak a társadalomtudományok (konkrétan a történelem és a közgazdaságtan) megalapozásának. Ezen a területen azonban érdekes módon kevésbé tartják sürgetőnek az alapok tisztázását, mivel a fogalmak, mint „háború és béke, export és import stb. közelebb állnak a közvetlen észleléshez az olyan fogalmaknál, mint az atom, vagy az éter” (Wissenschaftliche 1929: 313). A metafizikától való megtisztítás folyamata pedig – ha nem is ugyanazon a szinten, mint a fizikában – már régen elkezdődött, amelynek kapcsán követendő példaként Walrason és az idősebb Mengeren kívül Quesnay-t, Smitht, Ricardót és Marxot is konkrétan megemlíti.

A program végrehajtásának részleteit, amelyek számos nyelv- és tudományfilozófiai, valamint metodológiai koncepció megszületését (analitikus és szintetikus állítások logikai alapon való megkülönböztetése, felfedezés és igazolás kontextusának szétválasztása, megfigyelési és elméleti állítások distinkciója, metafizika logikai alapon való kiküszöbölése, fizikalizmus, verifikációelmélet, konfirmációelmélet stb.) ösztönözte, a résztvevők

más-más módon képzeltek megvalósítani. Mindez pedig igen termékeny vitákhoz vezetett, amelyek sokszor éppen a kitűzött program gyenge pontjaira világítottak rá, és bár a belső viták, valamint a későbbi tudományfilozófiai irányzatok fényében a program számos eleme megvalósíthatatlannak bizonyult, a Bécsi Kör problémafelvetései a mai napig nagyon nagy hatást gyakorolnak a tudományos és a tudományokról való gondolkodásra.

Karl Menger matematikus⁵ volt, és rendkívül széles érdeklődési körrel rendelkezett, amely nem csak a tiszta, illetve alkalmazott matematika területeire terjedt ki, hanem a matematika és általában a tudományok alapjaival kapcsolatos, a XIX–XX. század fordulóján felszínre kerülő problémák iránt is igen élénk érdeklődést mutatott. 1927-től a geometria professzora a Bécsi Egyetemen és – korábbi tanára, Hans Hahn révén – tagja a Bécsi Körnek. Korábban két évet Amszterdamban töltött Brouwer mellett, így alkalma nyílt alaposan megismerni mindhárom korábban ismerttetett matematika-filozófiai koncepciót, amelyek a Bécsi Kör filozófiájával együtt gyakorlatilag meghatározták a tudományokhoz való hozzáállását. A Bécsi Körben folytatott tevékenysége mellett 1928-ban megalapította híres Matematikai Kollokviumát a Bécsi Egyetemen, ahol az általános egyensúlyelmélet történetének főszereplőin kívül számos olyan nagy formátumú tudós megfordult, mint Kurt Gödel⁶, Alfred Tarsky, Norbert Wiener vagy Rudolf Carnap, akik többnyire a bécsi kör összejövetelein is részt vettek. Menger egyes publikus megjegyzései, valamint levelezése alapján (Becchio 2007) arra lehet következtetni, hogy a Kollokvium alapításánál szerepet játszott, hogy bizonyos kérdésekben – ide tartoznak a matematikai állítások jellegére és az egységes tudományra vonatkozó megközelítések, amelyeket metodológiai szempontból Menger nem tartott túl gyümölcsözőnek – nem értett egyet a Bécsi Körben domináns nézetekkel.

5 Munkássága kiterjedt a geometria, az absztrakt algebra, a funkcionálanalízis, a variációszámítás és a matematikai logika területére. Legismertebb eredményei a görbületek dimenziófüggetlen definíciója, a gráfelméleti Menger-tétel, valamint a manapság különösen fontos fraktálméletből ismert Menger-szivacs, amely tulajdonképpen a Cantor-halmaz térbeli kiterjesztése.

6 Gödel nevezetes, 1931-ben publikált, nemteljességi tételei (Gödel 1931) a Hilbert-program eredeti formájának tarthatatlanságára mutattak rá, és több gondolkodó (köztük Carnap, Menger és Neumann) matematikáról alkotott nézeteit is megingatták. Az első tétel szerint, ha egy axiómarendszer konzisztens (ellentmondásmentes), akkor nem lehet teljes, azaz mindenképpen marad benne megoldhatatlan probléma (bizonyíthatatlan állítás), míg a második tétel szerint a rendszer konzisztenciája nem bizonyítható a rendszeren belül.

A Kollokvium összefüggéseinek, hasonlóan a Bécsi Kör működéséhez, a náci uralom vetett véget. Menger 1937-ben végleg az Egyesült Államokba költözött (1930–31-ben vendégkutatóként már járt ott, és megismerkedett számos Amerikában élő jelentős matematikussal), ahol folytatta aktív tudományos és tudományos szervező tevékenységét. 1985-ben bekövetkezett haláláig több amerikai és európai egyetem vendégoktatója volt.

A Kollokviumon előadott és megvitatott munkákat *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* címmel adták ki. A matematikai közgazdaságtan szempontjából több döntő jelentőségű írás mellett ebben a kiadványban számos úttörő elméleti és alkalmazott matematikai tanulmány is helyet kapott. Menger saját tudományos tevékenységén túl tehát tudományos szervező munkája is igen fontos szerepet játszott nem csak a közgazdaságtan, hanem a tiszta matematika, valamint a matematikai fizika történetének alakulásában.

Vegyük észre, hogy egy a logikai pozitivizmus szellemében készült közgazdasági modell felépítésénél „csupán” arra kell ügyelnünk, hogy a matematikai szimbólumok által jelölt mennyiségek mérhetőek legyenek, vagy legalábbis a meghatározásuk elvi lehetősége biztosítva legyen. Ha ez a feltétel teljesül, a közgazdasági interpretáció problémája ezzel megoldottnak tekinthető, és innentől kezdve elegendő a rendszer konzisztenciájával foglalkozni, azaz csak a matematikai probléma marad, amelyet viszont megközelíthetünk többféle matematikafilozófiai irányzat szemüvegén keresztül. Ez a hozzáállás a közgazdasági problémákhoz igencsak különbözik a cambridge-i iskola által képviselt normáktól. Ebből kiindulva viszont érthetővé válik, hogy a Matematikai Kollokviumon megvitatott egy-egy alkalmazott matematikai probléma miért származhatott gyakorlatilag bármely tudományterületről, és miért kerülhettek egymás mellé kvantummechanikai és sok más megközelítéstől idegen közgazdasági modellek: az egységes tudomány megvalósítása ugyanis előbb-utóbb mindegyik elmélet letisztázását igényli. Amennyiben pedig a matematikai problémát körvonalazó szimbólumok által jelölt mennyiség mérhetősége nem csak elvben, hanem ténylegesen is megvalósítható lesz, akkor (a rendszer egységes voltának köszönhetően) teljesen mindegy, hogy annak értékét egy fizikai kísérletről vagy egy statisztikai kimutatásból nyerjük majd.

Walras eredeti modellje (Walras [1874] 1900) ilyen szempontú elemzésre alkalmatlan volt, különösen a benne szereplő „rareté” problémás fogalma miatt, amely, mint az a későbbi vitákból is látszik, igen nehezen köthető a közvetlen tapasztalathoz. A célnak viszont tökéletesen megfelelt a modell Gustav Cassel (1918: 111-116) által „leegyszerűsített” változata. A svéd közgazdász ugyanis mellőzte a keresleti függvények egyéni döntésekből való levezetését – amely Walras számára oly nagy jelentőséggel bírt –, és ezzel ki is emelte a rejtőzködő matematikai problémát, amelyre a Kollokvium tagjai már igazi kihívásként reagálhattak.

Cassel n darab terméket és r darab termelési tényezőt feltételezett, valamint azt, hogy egy időszakra az r darab termelési tényezőtől adott R_1, R_2, \dots, R_r mennyiségek állnak rendelkezésre. Ha a_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, r$) jelöli az úgynevezett technikai együtt-hatásokat, azaz pl. a_{23} azt a mennyiséget, amelyre a 2-es termék egységnyi termeléséhez a 3-as termelési tényezőtől szükség van, és q_j jelöli az egyes termelési tényezőket, p_i pedig az egyes termékek árát, valamint N_i az egyes termékekből keresett, A_i pedig a belőlük kínált mennyiségeket, illetve $F_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$ a termékek keresleti függvényeit, akkor a modell egyensúlyi feltételei a következők:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & p_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{ir}q_r & (i=1, \dots, n) \\
 (2) & N_i = F_i(p_1, p_2, \dots, p_n) & (i=1, \dots, n) \\
 (3) & N_i = A_i & (i=1, \dots, n) \\
 (4) & R_j = a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{nj}A_n & (j=1, \dots, r)
 \end{array}$$

Az (1) egyenletcsoport nem más, mint Walras igazságos ármeghatározása a zérus profit feltétel alapján, tehát egyik termék termelésénél sem lehet nyereséget realizálni. A (2) egyenletcsoport a fogyasztói oldal viselkedését összegzi, vagyis a keresett mennyiségeket az áráktól függő keresleti függvények határozzák meg. A (3) egyenletcsoport a kereslet és kínálat egyensúlyát, azaz a piaci egyensúly feltételeit foglalja össze, a (4) egyenletcsoport pedig azt, hogy a termékek előállításánál éppen annyit használnak fel az egyes termelési tényezőkből, amennyi rendelkezésre áll. Ebben az egyenletrendszerben $n+n+n+r$ darab ismeretlen van (a keresett és a kínált mennyiségek, a termékek ára, valamint a termelési tényezők ára) és ugyanennyi egyenlet. Cassel gyakorlatilag Walras gondolatmenetét követve, de némileg kiegészítve, látja be heurisztikus úton az egyenletek és ismeretlenek számának azonosságára építve, hogy mivel csak a relatív árak számítanak (azaz eggyel kevesebb ismeretlenünk van), egy újabb „elv” bevezetésével a független egyenletek számát is eggyel csökkentve meghatározhatók az egyensúlyi árak és mennyiségek.

A Walras-modell Cassel-féle egyszerűsítése arra is alkalmat adott, hogy egy szociáldemokrata német zsidó (Hans Neisser), akit az elsők között vett üldözöbe a náci hatalom, valamint egy az NSDAP tagjaként, majd az SS kötelékében is tevékenykedő kutató (Heinrich von Stackelberg) egyaránt olyan súlyos elégtelenségeket mutasson ki rajta, amelyek a Menger-féle kollokvium figyelmét a problémára irányították. Neisser 1932-ben mutatott rá egy tanulmányában (Neisser [1932] 1990), hogy egyrészt igen könnyen előfordulhat, hogy a termelési tényezők keresletének és kínálatának egyenlősége csak negatív árak mellett áll fenn, másrészt, ha a termékek ára meg kell hogy egyezzen a termelés

egységköltésével, akkor a modellből negatív termelési mennyiségek is adódhatnak. Stackelberg (1933) pedig 1933-ban mutatott példát arra, hogy ha a termékek száma kisebb, mint a felhasznált termelési tényezők száma, akkor többféle tényezőár-kombináció is tartozik ugyanahhoz a termékárhoz,⁷ és ez a helyzet akkor is fennállhat, ha a termékek száma nagyobb, mint a termelési tényezők száma, tehát az egyenletszámlálás módszere semmiképpen sem biztosít elégséges feltételt a megoldás létezéséhez.

Frederik Zeuthen dán közgazdász, akinek szerénységére jellemző, hogy ezt a felismerését is egy diákjának tulajdonította, (az idősebb) Carl Mengerre hivatkozva felhívta a figyelmet arra is, hogy ha egy jószág nem szűkös (a kínálata nagyobb, mint a kereslete), akkor nincsen ára. És bár Cassel a modelljében csak szűkös javakat feltételezett, az a kérdés, hogy melyik jószág válik az egyensúlyban szűkössé és melyik szabad jószággá, nem dönthető el előre, hanem a modellen belül kerül meghatározásra. A fentiek alapján Zeuthen (1933) javasolta először egyenletek helyett egyenlőtlenségek használatát az általános egyensúlyi feltételek megfogalmazásához.

Mégpedig oly módon, hogy a (4) egyenletet az $R_j \geq a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{nj}A_n$, ($j=1, \dots, r$) egyenlőtlenséggel váltsuk fel, azzal a kiegészítéssel, hogy ha valamely termelési tényezőre szigorú egyenlőtlenség teljesül, azaz $R_j > a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{nj}A_n$, akkor az egy szabad jószág, vagyis $q_j=0$.

Az általános egyensúly modelljében egyenletek helyett egyenlőtlenségeket szerepeltetni azonban igen komoly matematikai következményekkel jár. Mindezt Karl Schlesinger (1889–1938) magyar származású, Ausztriában tevékenykedő sikeres bankár ismerte fel (Schlesinger 1935). Menger barátjaként és matematikai érzékkel megáldott, közgazdasági problémák iránt érdeklődő emberként állandó résztvevője volt a Matematikai Kollokviumnak. Ott ismerkedett meg Menger egy tanítványával, a kolozsvári születésű Wald Ábrahámmal (1902–1950), aki eredetileg geometriával foglalkozó matematikusként került a Bécsi Egyetemre, azonban zsidó származása miatt doktorátusának megszerzése után el kellett hagynia az intézményt. Így vált hivatalosan Schlesinger matematikaturorává, aki ezen címszó alatt teremtve pénzügyi biztonságot, gyakorlatilag finanszírozta további kutatásait a geometria és differenciálgeometria területén, és nem utolsósorban megismertette Waldot az őt annyira foglalkoztató általános egyensúlyelmélet problémáival. Számos matematikai témájú tanulmány mellett Wald 1934–1936-ig írt négy olyan cikket (Weintraub 1983), amelyekben egyrészt Schlesingerrel együtt egyenlőtlenségek formájában fogalmazták meg az általános egyensúly kritériumait, másrészt bevezették az úgynevezett *komplementaritási feltételt*, amely lehetővé teszi, hogy a bonyolult egyenlőtlenségi feltételrendszert egyszerűsítsék, harmadrészt az általános egyensúly

7 Ha például egy termékünk és két termelési tényezőnk van, akkor a $p=a_1q_1+a_2q_2$ egyenletet igen sokféle (q_1, q_2) termelésitényezőár-kombináció kielégíti.

létezésének első matematikailag korrekt bizonyítását adja többféle lehetséges modellben. A négy cikkből kettő megjelent a kollokvium eredményeit összefoglaló *Ergebnisse* kiadványban, kettő azonban elveszett (Weintraub 1983). Wald végül Morgenstern biztatására írta meg azt a sokat hivatkozott cikket (Wald [1936] 1951), amiben egzisztenciátételeit összefoglalja, és eredményeinek közgazdasági értelmezését adja.

1938-ban az Anschluss idején Schlesingert meggyilkolták, Waldnak pedig végleg távoznia kellett Ausztriából zsidó származása miatt. A kollokvium több tagjához hasonlóan az Egyesült Államokba emigrált, ahol élete további részében matematikai statisztikával, illetve annak közgazdasági és katonai alkalmazásokra való kiterjesztésével foglalkozott. A statisztikai következtetésemélet szigorú matematikai megalapozása, valamint az ökonometria területén elért több jelentős eredmény fűződik a nevéhez. A beszámolók szerint nemcsak remek szakember, de kiváló tanár is volt, ezért számos amerikai egyetemen megfordult oktatóként, bár a legtöbb időt a New York-i Columbia Egyetemen töltötte. 1950-ben repülőgép-szerencsétlenségben vesztette életét feleségével együtt, amikor az indiai állam meghívására vendégkutatóként az országba utazott.

Wald cikkében ([1936] 1951) kifejezetten hosszan tárgyalja a feltételek értelmezhetőségének és valóságosságának problémáját, amelyet egy matematikai közgazdaságtan területén belül született modell esetében alapvető fontosságúnak tart. Cikkében nem csak a Cassel-modell egyensúlyának egzisztencia- és unicitási problémáját, de Cournot oligopólium-modelljének egzisztencia- és stabilitási problémáját is tárgyalja. A modell újrafogalmazásakor bevezette az úgynevezett u_j ($j=1, \dots, r$) többletváltozókat, amelyek segítségével a (4) egyenlet a következőképpen írható át: $R_j = a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{nj}A_n + u_j$ ($j=1, \dots, r$), ahol ha $u_j > 0$, akkor $r_j = 0$, azaz $u_j r_j = 0$ ($j=1, \dots, r$). Tehát, ha egy termelési tényezőtől nagyobb mennyiség áll rendelkezésre, mint amennyi felhasználásra kerül, akkor az egy szabad jószág, és az ára nulla. A többi egyenletet változatlanul hagyta. Az egyensúlyi feltételek között a termelési tényezőkből rendelkezésre álló mennyiségek szigorú pozitivitásának, az a_{ij} technológiai együttthatók nemnegativitásának és legalább egy technológiai együtttható szigorú pozitivitásának kikötése mellett jelentős megszorítások szerepelnek a keresleti függvényekre nézve, amelyek a későbbi egzisztenciabizonyításokban is kulcs szerepet játszottak. Wald egyrészt folytonos keresleti függvényeket feltételezett, amelyek esetében minden véges pozitív ár mellett pozitív a kereslet a termékekből, és csak abban az esetben nulla, ha az ár végtelenül nagy. Másrészt újabb megszorításokat tesz a keresleti függvényre nézve, amelyeknek rámutat az egyéni döntésekben szereplő határhásonokra vonatkozó következményeire is. Feltételezi ugyanis, hogy az i -edik termék határhásona nagyobb mértékben változik, ha az i -edik termékből fogyasztott mennyiség változik, azaz jobban reagál a közvetlen, mint a közvetett hatásokra. A termelési tényezők árainak unicitását pedig a termelési tényezők helyettesíthetőségével hozta összefüggésbe.

Wald munkásságának tehát igen fontos hozadéka az általános egyensúlyelméletben, hogy rámutat arra a tényre, hogy az általános egyensúly egzisztenciája csak bizonyos megszorítások mellett biztosítható a keresleti függvényekre, illetve az azok mögött meghúzódó egyéni ízlést jellemző függvényekre, valamint a technológiára nézve. Wald ezeket a feltételezéseket a „nem valóságű” jelzővel illeti, ami a témához való sajátos metodológiai hozzáállást tükröz. A matematikai bizonyítást halmazelméleti és topológiai eszközökkel végezte el; ezeknek az akkor modernnek számító és igen bonyolult matematikai eszközöknek a használata a közgazdaságban addig egyáltalán nem volt jellemző.

A REJTÉLYES NEUMANN-ÖRÖKSÉG

Wald tanulmányai mellett az általános egyensúlyelmélet történetének másik fontos mérföldköve Neumann Jánosnak (1903–1957) egy máig tisztázatlan körülmények között keletkezett rövid cikke (Neumann 1938), amely a Matematikai Kollokvium kiadványkötetének utolsó darabjaként jelent meg. Neumann János 1903-ban született Budapesten. Tudományos tevékenysége a matematika hagyományos ágain kívül számos más tudományra is kiterjedt, és rendkívül széles területeket ölelt fel. Korai halála ellenére igen terjedelmes életművet hagyott hátra, amely önmagában a publikációinak számában is megmutatkozik. Több olyan elmélet megalkotása, illetve tisztázása fűződik a nevéhez, amely a későbbi tudomány és technika fejlődése szempontjából alapvető fontosságúnak bizonyult. Egyes műveiből külön tudományágak fejlődtek, más munkáiban pedig olyan problémákat oldott meg „játszi könnyedséggel”, amelyek már hosszú idő óta foglalkoztatták az egyes szaktudományok kutatóit. Integratív szemléletmódja és munkamódszere többek között azon a különleges képességén alapult, hogy rendkívüli érzékkel látta meg különböző, egymástól akár igen távol eső hatókörrel rendelkező elméletek lényeges, illetve közös vonásait.

A hatalmas Neumann-életműben szinte észrevétlenül maradt ez az először egy princetoni szemináriumon 1932-ben előadott, majd Menger kollokviumán megvitatott és 1938-ban publikált mű. Neumann ebben a cikkben egy igencsak szokatlan közgazdasági modellt vázol fel, majd abban az egyensúly egzisztenciájának bizonyításához általánossítja Brouwer híres fixponttételét,⁸ ami azon kívül, hogy tisztán matematikatörténeti szempontból fontos önálló eredménynek számít, olyan új eszközt hozott a közgazdaságban, amely később minden általános egyensúly-elméleti egzisztenciabizonyításnak alapvető eszközzé vált. Neumann az általa modellezett gazdasági jelenséget „tipikusnak” nevezi, de ezen túl – Walddal ellentétben – nem foglalkozik a feltételek valóságúságának

8 Az n dimenziós euklideszi térben egy korlátos, zárt, konvex halmaz minden önmagába való folytonos leképezésének létezik legalább egy fixpontja.

kérdésével. Mindössze azt biztosítja, hogy az egyes mennyiségek, a Bécsi Kör szellemében, legalább elvileg mérhetőek legyenek.

Az elemezni kívánt jelenség a következő: egyrészt „a javakat nemcsak a »termelés természetes tényezői«-ből állítják elő, hanem elsősorban egymásból. E termelési eljárások körkörök lehetnek” (Neumann 1938: 160). Másrészt egy bizonyos terméket általában többféle termelési eljárással elő lehet állítani, és ezek nem feltétlenül ugyanolyan hatékonyak (jövedelmezőek). Harmadrészt pedig egy bizonyos termelési eljárás alkalmazása során többféle termék – Neumann szavaival élve: „melléktermék” – is keletkezhet. Felmerül tehát a kérdés, hogy mely eljárásokat fogják használni a termelés során, mint nyereséges és hatékony műveleteket, valamint, hogy mi lesz a termékek ára. A modell specifikálásakor néhány megszorító feltételezéssel élt: (1) zárt gazdaságot feltételezett, amelyben nincsen külkereskedelem; (2) több időszak létezik, amelyek megválasztása önkényes, a felhasználható készletek az időszak elején állnak rendelkezésre, és a cserére az időszak végén kerül sor; (3) a termelési arányokat változatlannak tekintette, így a gazdasági növekedés egyetlen a konstanssal leírható; (4) a kamattényezőt szintén egyetlen β konstanssal jellemezte; (5) csak újratermelhető javakat vett figyelembe, vagyis az elsődleges (pl. természeti) erőforrásokat a modell hatókörén kívül helyezte, és feltételezte azok korlátlan rendelkezésre állását; (6) fogyasztás csak a termelési eljárások révén megy végbe, és ezek felölelik a munkások és alkalmazottak által elfogyasztott létszükségleti cikkeket is (azaz pl. a háztartások fogyasztása a munkaerő, mint újabb termék, illetve termelési tényező előállításához szükséges termelési eljárás); (7) minden terméket, illetve jövedelmet újból felhasználnak, illetve befektetnek, a hozam a termeléssel arányos; (8) az amortizációt külön termékeként külön termelési eljárással szerepeltette.

Ha a_{ij} -vel, illetve b_{ij} -vel jelöljük azt a mennyiséget, amelyet az i -dik eljárás a j -dik termékből felhasznál, illetve előállít, valamint x_i -vel az i -dik termékből felhasznált mennyiséget, p_j -vel pedig a j -dik termék árát, akkor a gazdasági egyensúly feltételei a következőképpen fogalmazhatók meg:

- (1) $x_i \geq 0, p_j \geq 0; \sum_{i=1}^m x_i > 0, \sum_{j=1}^n p_j > 0; a_{ij} + b_{ij} > 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$
- (2) $\alpha \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \quad (j=1, \dots, n)$ és ha valamelyik $j=k$ indexre szigorú egyenlőtlenség áll fenn, akkor $p_k = 0$.
- (3) $\beta \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} p_j \quad (i=1, \dots, m)$ ha valamelyik $i=l$ indexre szigorú egyenlőtlenség áll fenn, akkor $x_l = 0$.

Az (1) feltétel a mennyiségek és árak nemnegativitását biztosítja azzal a megkövetéssel, hogy legalább egy terméket biztosan termelnek, legalább egy termék biztosan nem

szabad jószág, valamint minden termék megjelenik minden termelési eljárásban vagy terméként, vagy termelési tényezőként, vagy mindkettőként. A (2) feltétel biztosítja, hogy egyik termékből sem használhatnak fel többet, mint amennyi rendelkezésre áll. A (3) feltétel szerint pedig egyetlen eljárás sem lehet nyereséges, és a veszteséges eljárásokat nem használják. Látható, hogy $n+m+2$ darab ismeretlenünk és $n+m$ darab feltételünk van, azonban a termelési szinteknek és az áraknak csak az egymáshoz viszonyított arányait kell figyelembe venni, ezért a matematikai problémát ismét csak az jelenti, hogy a feltételekben nem egyenletek, hanem egyenlőtlenségek szerepelnek.

Neumann rámutatott, hogy a megoldás létezése nem igazolható az ismeretlenek és feltételek számának egyezőségére építő szokásos kvalitatív érveléssel, hanem topológiai összefüggések ismeretét és Brouwer fixponttételének általánosítását igényli.⁹ Ezt a Neumann által általánosított tételt fogalmazta újra és látta el egyszerűbb bizonyítással Shizuo Kakutani (1911–2004) 1941-ben (Kakutani 1941), ami a későbbi általános egyensúly-elméleti elemzések alapvető és nélkülözhetetlen eszközévé (Kakutani-fixponttétel¹⁰) vált. Neumann tehát nem csak az általános egyensúly, mint közgazdasági probléma tisztázásához nyújtott iránymutatást, de a matematikai probléma kulcsát jelentő eszköz is végső soron tőle származik.

A Neumann-modell keletkezésének körülményeiről azonban csak homályos információk állnak rendelkezésre. A szerző ugyanis nem utal arra, hogy honnan merített motívációt cikke megírásához, ezért számos hipotézis látott már napvilágot ezzel a kérdéssel kapcsolatban. Neumann, ha nem is rendszeresen, de résztvevője volt Menger kollokviumának, amikor princetoni kinevezése után időnként Európába látogatott, tehát azt az utat is választhatta volna, amelyet Wald járt be a Cassel-kritikák kapcsán. A modellt azonban először 1932-ben prezentálta még a kritikák megjelenése előtt, tehát valószínűleg a Kollokvium állandó résztvevőitől függetlenül dolgozott a problémán, és csak később szerzett tudomást Wald munkájáról. Mivel nagyon keveset tudunk Neumann akkori közgazdasági ismereteiről, és a modell is erősen eltér az eredeti Cassel-modelltől, többen még azt is megkérdőjelezzik, hogy egyáltalán ugyanazon a problémán dolgozott-e Neumann, mint Wald. Annyi bizonyos, hogy Káldor Miklós – Neumann korábbi iskolatársa

9 A megoldás valóban nem bizonyítható kvalitatív érveléssel, azonban Neumann a fixponttételek felhasználásának szükségességét illetően tévedett. Kemeny, Morgenstern és Thompson (1956) bemutatott egy egyszerűbb bizonyítást a megoldás egzisztenciájáról. A későbbi általános egyensúly-elméleti egzisztenciabizonyításokhoz azonban már valóban nélkülözhetetlenek bizonyultak a fixponttételek.

10 Az n dimenziós euklideszi térben egy korlátos, zárt, konvex halmaz minden önmagába való felülről félig folytonos, konvex ponthalmaz leképezésének létezik legalább egy fixpontja.

– visszaemlékezéseiben megemlíti (idézi Zalai 2000), hogy ajánlott honfitársának összefoglaló jellegű közgazdasági munkákat, köztük Cassel könyvét is. A tanulmány központi problémája valóban az egyensúly egyenlőtlenségi feltételek melletti létezésének igazolásához szükséges matematikai eszköztár megadása, azonban a fogyasztói oldal kezelése merőben idegen a neoklasszikus gondolatmenettől. Emiatt, valamint a tőkejavak sajátos kezelése és a termelés körkörös jellege miatt, bizonyos források (Thomson, idézi Zalai 2000; Kurz és Salvadori 1995) berlini tartózkodásával és az „orosz iskolával” hozzák összefüggésbe a modellt.

Kérdéses, hogy a szó szociológiai értelmében valóban lehet-e orosz iskoláról beszélni, azonban az tény, hogy a XX. század első harmadában több olyan tudós is tevékenykedett, akiket bizonyos szempontból összekapcsol a ricardói és marxi hagyományok követése, a termelés körkörös jellegének hangsúlyozása, valamint a neoklasszikus hagyományra nem jellemző lineáris algebrai eszköztár használata. A csoport első tagjaként az orosz Vlagyimir Dmitrijev szokás megemlíteni, aki 1898–1902-ben megjelent esszéiben megkísérelte összeegyeztetni a munkaérték-elméletet a marginalista hasznosság koncepciójával – Cournot eredményeit is felhasználva. Az ő követőjének tekinthető a szentpétervári születésű, de lengyel származású és szinte egész életében Berlinben oktató Ladislaus Bortkiewicz, akinek valószínűség-számítási és statisztikai eredményei mellett a marxi transzformációs probléma matematikai megformulázása és több irányzattal – köztük magával Marxszal, az osztrák iskolával és a német történeti iskolával – szemben megfogalmazott kritikai észrevételei is kiemelendők. Bortkiewicz tanítványa volt az 1920-as évek végén a később az Egyesült Államokba emigrált és Nobel-díjjal jutalmazott Wassily Leontief (1905–1999), a termelés körkörös jellegére épülő input-output modell megalkotója, valamint Robert Remak, aki sajátos módon formalizált gazdasági modelljével akkori igen nagy feltűnést keltett Berlinben. Neumann ekkor szintén Berlinben tartózkodott, ezért valóban hozzájuthatott Leontief 1928-as doktori disszertációjához a termelés körkörös jellegéről és Remak modelljéhez egyaránt¹¹ (Screpanti et al. 2005).

Kevésbé valószínű, hogy Neumann valamely közgazdasági irányzathoz kívánt volna csatlakozni modelljével. Más tudományok tanulmányozásakor sokkal inkább a különböző megközelítésmódok közötti szintéziskeresés jellemezte – gondoljunk csak a kvantummechanika kétféle interpretációjának vagy a számítógép és az agy működésének közös matematikai elméleteire – olyan matematikai modellek formájában, amelyek akár többféleképpen is interpretálhatók; mindezzel az egységes tudomány bécsi eszményének megvalósításához járul hozzá. A cikkben a modell felépítésekor a közgazdasági gyökereket nem jelöli meg ugyan, de egyfajta „fenomenológiai általánosság” hangsúlyozása kapcsán utal a modell egyes elemeinek lehetséges termodinamikai interpretációira, valamint

11 Az orosz iskola hagyományait az olasz Piero Sraffa vitte tovább.

a saját korábbi játékelméleti modelljével való szoros kapcsolatra ő maga mutat rá explicit módon.

Tehát sokkal inkább elképzelhető, hogy a modell az egységes tudomány eszménye, mint bármely közgazdasági irányzat szellemében született. Mindenesetre akármi-lyen motivációnak az eredménye is Neumann munkája, annyi bizonyos, hogy az általános egyensúlyelmélet neoklasszikus teoretikusain kívül a későbbiekben Koopmans által kidolgozott lineáris tevékenységelemzési modell (LTM) hívei, a neoricardiánus hagyományokat követő Sraffa, valamint dinamikus jellege miatt egyes növekedési modellek megalkotói egyaránt fontos kiindulópontnak tekintik.

A BRIT FOGADTATÁS

Az általános egyensúlyelmélet alakulása szempontjából Bécs mellett a másik fontos szellemi központ a London School of Economics (LSE) volt. 1929-ben nevezték ki tanszékvezetővé a 31 éves Lionel Robbinst (1898–1984), aki kiváló vezetői készségével egy olyan új szemléletű tudományos közeget teremtett Londonban, amely alkalmassá tette az intézetet arra, hogy Cambridge ellenpólusává válhasson. Robbins egyrészt egyedülálló jártassággal rendelkezett a kontinentális közgazdasági irodalomban, másrészt nagyon nagy hatással voltak rá a logikai pozitivizmus eszméi (személyesen is megfordult a Bécsi Kör összejövetelein). Ily módon sajátos metodológiai szemléletmódját, amely többek között a közgazdaságtan tárgyának újradefiniálásában is megjelent, valamint a lausanne-i és osztrák hagyományokat, illetve a svéd iskola eredményeit egyaránt megismertette azzal az igen figyelemreméltó gárdával, amelyet maga köré gyűjtött, és amely tagjainak szakmai érdeklődését nagyon jó érzékkel irányította. A csapat tagjai között olyan fiatal közgazdászok szerepeltek, mint John Hicks (1904–1989), Káldor Miklós (1908–1986), Roy George Douglas Allen (1906–1983) és Abba Lerner (1903–1982), akik mindannyian a XX. század közgazdaságtanának meghatározó alakjaivá váltak. Robbins szervezőképességének köszönhetően a kontinens számos közgazdásza tette tiszteletét Londonban, hogy gondolatait egy igazán pezsgő szellemi közegben vitathassa meg. Schumpeter, Mises, Lindahl, Ohlin és Viner egyaránt megfordultak ebben az időben az LSE-n, és Hayek hosszabb időt is töltött ott vendégoktatóként. Valószínűleg elsősorban az ő munkássága kapcsán merültek fel azok a kérdések, amelyek az általános egyensúlyi elemzési keretnek a ciklikus ingadozások magyarázatára való alkalmazhatóságát, valamint – a modell olyan dinamikus jellemzőivel összefüggésben, mint a stabilitás – a pénz és a várakozások szerepével kapcsolatos problémákat feszegetik. A walrasi koncepció továbbfejlesztett változataiban ugyanis a pénz státusza korántsem bizonyult tisztázott kérdésnek.

Hicks, aki Nobel-díját részben az általános egyensúlyelmélethez való hozzájárulásáért kapta, szemben a Bécsi Kollokvium résztvevőivel, sokkal inkább a közgazdasági, mint a matematikai problémából indult ki. Álláspontja szerint a munkapiacnak, a fogyasztási javak és a tőke piacának, valamint azzal összefüggésben a nemzetközi kereskedelemnek a problémái az egyes piacok kölcsönös összefüggéseire vezethetők vissza. És mivel ezek a gazdasági jelenségek természetüknél fogva időbeli folyamatokhoz köthetők, ezért az általános egyensúlyelméletet is dinamikus szemléletmódban tárgyalja. Hicks szerint az általános egyensúlyelmélet statikus modelljei csupán a kérdések pontos megfogalmazására használhatók, viszont azok dinamikus kiterjesztéseiben sokkal több lehetőség rejlik, mint azt a cambridge-i közgazdászok, beleértve Marshallt és Keynest is, gondolták. *Érték és tőke* (Hicks 1978) című 1939-ben megjelent könyvében nem csak a fogyasztás és termelés elméletét fogalmazza újra modern terminusokban, kiküszöbölve a kardinális hasznossági megközelítést és bevezetve többek között a *helyettesítési határárány* és az árváltozások hatásfelbontásának fogalmát, hanem részletesen tárgyalja az általános egyensúly és az időbeliség viszonyát is, eljutva ezzel a bér- és tőkeelmélet tisztázandó kérdéseire.

Pedagógiai szempontból Marshall módszerét követte és a főszövegben igen kevés matematikát alkalmazott, ami valószínűleg nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy könyve igen népszerű és széles körben ismert művé váljon. Saját bevallása szerint a magyarázatok nagy része nem feltétlenül igényli a bonyolult matematikai kifejtést – ne felejtjük el, hogy matematikailag igen képzett emberről van szó –, de ahol ez mégis szükséges, ott is többnyire elegendő a grafikus ábrák használata, mivel a problémák általában két változóval szemléltethetők. A precíz matematikai levezetéseket és a többváltozós kiterjesztéseket ő is a függelékben közli. Ezzel gyakorlatilag tartalmilag és formailag egyaránt megalapozta azt az irányvonalat, amelynek szellemében a bevezető mikroökómia- és bizonyos makroökómia-tankönyvek a mai napig készülnek.

Az általános egyensúlyelmélet preferenciákon (és nem hasznosságokon) alapuló walrasi modelljének ismertetésekor Hicks szintén az egyenletszámítás módszerét alkalmazta az egyensúly létezésének belátásához, azonban rögtön hozzátette, hogy ez az egyensúlyi állapot csak mint egy távoli jövőkép értelmezhető, és igazán termékeny – és a makrojellegű problémákhoz utat nyitó – megközelítés az egyensúlyi rendszer *változásának* vizsgálata volna. Ebben a megközelítésben pedig nem merül fel az egyenlőtlenségek problémája – ahogy Walrasnál sem –, hogyha úgy gondoljuk, hogy a távoli jövőben bekövetkező egyensúly *csak közgazdaságilag értelmes* végállapot lehet.

Mindezek után kiterjeszti a komparatív statika marshalli elemzési módszerét az általános egyensúlyi rendszerre oly módon, hogy az egyensúlyi feltételekben testet öltő egyéni döntési kritériumoknak a másodrendű feltételeit is megvizsgálja, és ezeken keresztül határozza meg az egyensúlyi stabilitási feltételeit, amelyek újabb megszorításokat

jelentenek a fogyasztói preferenciákra és a technológiára nézve. Hicks szemléletmódja tehát dinamikus, de modelljeit nem fogalmazza meg matematikai értelemben vett dinamikus rendszerként, azaz olyan differenciálegyenletként, amelyben az egyes közgazdasági változók explicit módon az idő függvényei lennének. Ezt két évvel később amerikai kollégája, a matematikai közgazdaságtan másik nagy alakja, a szintén Nobel-díjjal jutalmazott Paul Anthony Samuelson (1915–2009) teszi meg (Samuelson 1947).

AZ AMERIKAI ÁLOM

Samuelson nagyjából egy időben Hicks fent említett általános egyensúly-elméleti kutatásaival, a Harvard Egyetemen doktori disszertációján dolgozott, amelynek kibővített változatát először 1941–42-ben könyv formájában (*Foundations of Economic Analysis*) is kiadták (Samuelson 1947). Ebben a műben a szerző újratárgyalja a közgazdaságtan számos alapproblémáját, amelyeket már a magas szintű matematika nyelvén fogalmaz meg, egyszerűsítve összefoglalva azt a matematikai eszköztárat, amelyet a diszciplína műveléséhez szükségesnek vél. Ez a munka egy időre sok szempontból lehatárolta a közgazdaságtan kutatási területeit azzal, hogy (1) letisztázta a múlt számos problémáját, (2) világosan kitűzött bizonyos jövőben megválaszolandó kérdéseket, és (3) egységes módszertani keretet adott a kérdések megválaszolásához.

A könyv mottója egy Willard Gibbstől, a termodinamika egyik meghatározó alakjától származó idézet: „a matematika nyelv”. Samuelson doktori témavezetője Gibbs egykori tanítványa, a polihisztorként számon tartott Edwin Bidwell Wilson volt, akin keresztül igen nagy hatást gyakorolt a szerzőre a matematikai fizika elmélete. A termodinamika tulajdonképpen értelmezhető egy olyan matematikai formában megjelenő analógiákon alapuló egyesítő elméletként, amelynek keretei között a fizika többféle területéhez tartozó jelenség – például mechanikai, elektromos, kémiai és hőjelenség – egyaránt kezelhető. Samuelson is hasonló metodológiai célokat deklarált a könyv első oldalain: analógiás alapon egyesíteni a közgazdaságtan olyan, jellegében hasonló problémáit, mint például a fogyasztói és termelői viselkedés. Az egyesítő keretelmélet pedig az optimalizációs elv, amelynek értelmében minden közgazdasági probléma visszavezethető egy maximum-, illetve egy minimumfeladatra, és ezek felírásához és megoldásához a többváltozós függvények feltételes szélsőérték-számítási eszköztára használható. Így az általános egyensúly feltételei is tulajdonképpen maximumfeltételek. Fontos még megemlíteni a – szintén fizikából kölcsönzött – *megfelelési elvet* (*correspondence principle*), amely a rendszer dinamikus és statikus jellemzői között teremt kapcsolatot annyiban, hogy az egyensúly stabilitási tulajdonságaiból olyan, legalábbis elvileg tesztelhető – Samuelson szavaival élve *operacionálisan tartalmas* – jellegzetességek következnek, amelyek a komparatív

statika eszköztárával kezelhetők. Ezen a ponton Samuelson utal Hicks munkájára, amelyből saját bevallása szerint bátorítást nyert, azonban annyiban mindenképpen szigorúbban fogalmazza meg az elvet, hogy nála az egyensúly kis környezetében végzett komparatív statikai elemzésnek nincs értelme abban az esetben, ha az egyensúly nem stabil. Ekkor ugyanis, ha egy kicsiny változás kimozdítja a rendszert az egyensúlyból, az egyensúly instabilitása miatt az nem képes visszatérni a korábbi egyensúlyi állapotába, így az erre vonatkozó feltételezés értelmetlen.

Samuelson cikkében (Samuelson 1941) és már említett könyvében (Samuelson 1947) az áralkalmazkodás mechanizmusát a következő differenciálegyenlet formájában fogalmazza meg egy termék piacára, ahol $p(t)$ függvény jelöli az ár alakulását az időben, $D[p(t)]$ a keresleti és $S[p(t)]$ a kínálati függvényt, valamint $H(\cdot)$ egy tetszőleges origón átmenő monoton növekvő függvényt: $dp/dt=H(D[p(t)]-S[p(t)])$.

Azaz ha a kereslet meghaladja a kínálatot, akkor az ár az időben növekszik, ha viszont a kínálat haladja meg a keresletet, akkor csökken. Abban az esetben pedig, ha a kereslet egy p_0 ár mellett megegyezik a kínálattal, akkor a piac egyensúlyban van. Ez az egyensúlyi ár egy bizonyos értelemben stabil, ha $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_0$, vagyis az ár minden helyzetből az egyensúlyi ár felé tart, ami pontosan akkor következik be, ha $dD/dp - dS/dp \leq 0$, azaz például a keresleti függvény negatív, a kínálati függvény pedig pozitív meredekségű az egyensúly környezetében¹². Ez utóbbi tulajdonság statikus megközelítésben is ellenőrizhető.

A könyvet lapozgatva az a benyomásunk támadhat, hogy egy matematikai kézikönyvvel van dolgunk, bár a szerző rengeteg közgazdasági példát mutat be az eszköztár alkalmazására. Ezek a példák több olyan elmélet alapjául is szolgáltak, mint a stacionárius növekedésemélet, a nemzetközi kereskedelem, az ordinális hasznosság, és a jóléti közgazdaságtan matematikai elméletei.

Az Egyesült Államokban a XX. század első harmadában viszonylag kevesen alkalmaztak kvantitatív módszereket a közgazdaságtan területén. A nagy gazdasági világválság korában is inkább a keynesi típusú elméletek gazdaságpolitikai konzekvenciáinak és megvalósíthatóságának vizsgálata dominált. Kivétel ez alól Irving Fisher, aki akkoriban talán az egyetlen nemzetközi hírű, befolyásos amerikai közgazdászként, néhány matematikában jártas kollégájával, már 1912-ben próbálkozott egy matematikai típusú közgazdaságtant művelő kutatócsoport létrehozásával. Tervük azonban érdeklődés hiányában kudarcba fulladt. Többek között ez is hozzájárult ahhoz a szkepticizmushoz, amivel Fisher később az Ökonometriai Társaság (*Econometric Society*) megalapítását fogadta, amikor az ösztöndíjjal Amerikában tartózkodó – később elsőként közgazdasági Nobel-díjjal jutalmazott – Ragnar Frisch norvég közgazdász és Charles Roos matematikus felvetették neki az ötletet a

12 Mindez belátható a dinamikus rendszer egyensúlyi pont körüli linearizálásával.

támogatását kérve. A két fiatal tudós egyetértett abban, hogy a közgazdaságtant, a matematikát és a statisztikát közelíteni kellene egymáshoz egy új, „ökonometriának” nevezett tudományterület égisze alatt, és ehhez a programhoz számos potenciálisan megnyerhető kutató nevét gyűjtötték össze Európából és Amerikából egyaránt, amivel végül sikerült elnyerniük Fisher támogatását. A nemzetközinek szánt Ökonometriai Társaság végül 1930-ban alakult meg, azonban az igazi áttörést az jelentette, amikor Alfred Cowles (1891–1984), egy sikeres üzletember megalapította a társasággal szorosan összefonódó Cowles Bizottságot (Cowles Commission) – jelentős anyagi támogatást nyújtva ezzel a testület által végzett kutatásokhoz.

Cowles eredetileg a tőzsdei előrejelzésekkel való elégedetlensége miatt kezdett érdeklődni a közgazdasági elmélet és a matematikai-statisztikai módszerek kapcsolata iránt, azonban személyes ismeretségei révén hamar meggyőződött arról, hogy a probléma sokkal kiterjedtebb annál, mint azt eredetileg gondolta – ráadásul a frissen megalakult Társaság törekvéseinek támogatásával jóval magasabb rendű célokat is szolgálhat. Az üzletember finanszírozta a testület mai napig meghatározó jelentőségű *Econometrica* című folyóiratának kiadását, és lehetővé tette, hogy számos európai tudós – akik közül néhánynak a közelgő háború miatt ez létkérdéssé is vált – Amerikában folytassa kutatásait. A Cowles Bizottság jelentőségét nehéz túlbecsülni. A kivétel nélkül prominens személyiségekből álló szakmai vezetéstestület meghívására érkezett az Egyesült Államokba Wald és számos kutató az LSE-ről. A Bizottság megbecsültsége lehetővé tette a tagjai számára, hogy az amerikai tudományos élet neves elméleti és alkalmazott kutatásokat végző szakembereivel folyamatos konzultációt folytassanak; az anyagi támogatás révén pedig saját szemináriumokat szerveztek, amelyek során több közgazdász komoly matematikai és statisztikai képzettségre tehetett szert. A Cowles Bizottság tevékenységének köszönhetően több későbbi Nobel-díjas eltöltött hosszabb vagy rövidebb időt a testületben, köztük Kenneth Arrow és Gérard Debreu, az általános egyensúlyelmélet meghatározó alakjai, valamint Tjalling Koopmans (1910–1985), aki többször is betöltötte a kutatási igazgatói posztot, kijelölve ezzel a fő kutatási irányokat, amelyek hatalmas lépéseket jelentettek a matematikai közgazdaságtan alakulásában. A mai napig működő Bizottságnál dolgozó kutatók az általános egyensúly problémáin kívül ökonometriai kérdésekkel, a fogyasztás- és termeléselmélet, valamint a jóléti közgazdaságtan matematizálásával, növekedéselmélettel és egyéb makroökonómiai kérdésekkel, vagyis a matematikai közgazdaságtan összes területével foglalkoztak és foglalkoznak.

Koopmans eredetileg matematikát és fizikát tanult szülőhazájában, Hollandiában, és mint a társadalmi problémák iránt érzékeny és az emberi kapcsolatok elemzésére fogékony természettudós, nagy örömmel csatlakozott ahhoz a Jan Tinbergen által vezetett csoporthoz, amely egy formálódó tudomány, a matematikai közgazdaságtan területén

végzett kutatásokat. Tinbergen mellett eleinte ökonometriai kutatásokat végzett Genfben a Nemzetek Ligájánál, majd a világháború elől családjával együtt az Egyesült Államokba menekült 1940-ben. Ott először teherhajók optimális hasznosításával foglalkozott, ami megteremtette az alapot számára ahhoz, hogy kidolgozza a szállítási problémák, majd később – a Cowles Bizottságnál kollégáival együtt – a termelés és elosztás általános matematikai elméletét. Tudományszervező tevékenysége is igen jelentős volt e területen, ami talán abban az 1949-es konferenciában csúcsondott ki, amelyhez kapcsolódóan tanulmánykötet jelent meg *A termelési és elosztási tevékenység elemzéséről* címen 1951-ben Koopmans szerkesztésében (Koopmans 1951).

A konferencián közgazdászokon, matematikusokon és statisztikusokon kívül a kormányzati szervek és az amerikai hadsereg képviselői is részt vettek. Az amerikai légierőnek végzett kutatásokhoz kapcsolódott ugyanis a téma egyik igen lényeges eleme, az elsősorban George Dantzig és Marshall Wood nevéhez köthető operációkutatás-elmélet és a programozási algoritmusok, többek között a szimplex módszer kidolgozása. Az általános „programozás” – amely felfogásukban „egy olyan tevékenységsorozat-tervet jelent, amelynek segítségével egy gazdaság, intézmény, vagy más tevékenységkomplexum egy meghatározott állapotból eljuthat egy másik állapotba” (Koopmans 1951: 15) – matematikai hátterének kidolgozásához, különösen a dualitáselmülethez Neumann János is hozzájárult, aki szintén közel állt ebben az időben a katonai alkalmazásokhoz. Koopmans ezt az explicit módon közgazdasági (vagy katonai) motivációból származó matematikai elméletet igyekezett integrálni (1) az általános egyensúlyelmélet területén elért bécsi eredményekkel, különös tekintettel a Neumann-modellre; (2) a termelés lineáris struktúráját megragadó és statisztikai adatokkal jól feltölthető Leontief-féle input-output modellel; és (3) a szocialista tervgazdaság ihlette kalkulációs vita kapcsán kidolgozott Lange–Lerner-féle tervezési elmélettel a „tevékenységelemzés” általános elméletének égisze alatt.

A szintézisre törekvés természetes része volt Koopmans számára, hogy a termelési függvények „mögé nézzen”, és axiomatizálja ezzel a termelés elméletét. A Neumann-modell struktúrájához hasonlóan az y_n ($n=1, \dots, N$) nettó kibocsátást k darab, a_{nk} együtthatóval jellemzett tevékenység segítségével előállíthatónak feltételezte. Ha x_k -val jelöljük az egyes tevékenységek alkalmazási szintjét és az a_{nk} együtthatókból képezzük az \mathbf{A} mátrixot, valamint a kibocsátási mennyiségekből és az alkalmazási szintekből rendre az \mathbf{y} és \mathbf{x} vektorokat, úgy az R^n jószágtérben egy y kibocsátási pont akkor nevezhető megvalósíthatónak, ha létezik olyan \mathbf{x} , amelyre $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ és $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$. Ebben a rendszerben több olyan további megszorítás is megfogalmazható, mint a technológiák irreverzibilitásának feltétele¹³ vagy az

13 Nem létezik olyan \mathbf{x} , amelyre $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$.

úgynevezett „nincsen ingyen ebéd” feltétel,¹⁴ amely kimondja, hogy semmit nem termelhetünk anélkül, hogy valamit fel ne használnánk. Ezek a megszorítások gyakorlatilag mind félterek metszeteit határozzák meg, tehát a további elemzés olyan konvex kúpok elméletére épít, amelyben a támasztó hipersíkok kiemelkedően fontos szerepet játszanak, és amely egy bizonyos felfogásban általánosabbnak tekinthető, mint az addig rendszeresen alkalmazott hagyományos függvénytan. Ezzel végleg elfoglalta domináns helyét a Neumann által bevezetett konvex analízis a matematikai közgazdaságtan eszköztárában.

KÖZJÁTÉK: A JÁTÉKELMÉLET SZÜLETÉSE

A játékelméletre – amely olyan konfliktusszituációk elemzésével foglalkozik, ahol a szereplőknek lehetősége van valamiféle stratégiai interakcióra – sokan úgy tekintenek, mint a matematika azon ágára, amelyet kifejezetten a közgazdasági problémák kezelésére fejlesztettek ki. Valójában ez a terület többé-kevésbé elkülönülten alakult ki attól a hagyománytól, amely a közgazdaságtan matematizálódásának főáramát meghatározta, és kialakulása után is viszonylag sok időnek kellett eltelnie ahhoz, hogy a közgazdasági elemzés szerves részévé váljon.

A játékok matematikai elemzése igen hosszú múltra tekint vissza, és tulajdonképpen egyidős a véletlen matematikájával. A később valószínűség-számításnak nevezett diszciplína kezdeteit a XVI–XVII. századra szokás visszavezetni, amelynek vezéralakjai, Girolamo Cardano, Blaise Pascal és Pierre Fermat, a természettudományok történetének meghatározó figurái szinte kizárólag különböző szerencsejátékokban felmerülő problémák kapcsán foglalkoztak a témával. A „valószínűség” kifejezés bevezetését Jacob Bernoullinak tulajdonítják, aki annak a számnak a jelölésére használta a terminus technicist, amelyet egy kísérletet minél többször elvégezve egy bizonyos esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága egyre inkább megközelít. Ebben a megközelítésben a „véletlen” tulajdonképpen azoknak a tényezőknek az összességét jelenti, amelyeket nem tudunk vagy nem akarunk figyelembe venni, éppen ezért a tudományok determinisztikus gépezetében sokáig nem is kapott semmiféle szerepet. Egyetlen kivételt ez alól csak az empirikus megfigyelések képeztek, amelyeknél viszont akár természettudományos kísérletekben, akár orvosi vagy gazdasági statisztikák készítésénél gyakran alkalmazták ezt a megközelítést a „zavaró tényezők” kezelésére. A diszciplína azonban jelentős átalakuláson ment keresztül az évek során, amelyben olyan nagy formátumú matematikusok vettek részt, mint Thomas Bayes, Pierre Simon de Laplace, Carl Friedrich Gauss, Pafnutij Lvovics Csebisev, Andrej Andrejevics Markov vagy Alexandr Mihajlovics Ljapunov, viszont a valószínűség Andrej

14 Nem létezik olyan x , amelyre $y = Ax \geq 0$, $x \geq 0$.

Kolmogorov-féle axiomatizálása csak 1933-ban történt meg. A szintén XX. század elején kialakuló mértékelmélettel való kapcsolatának tisztázása pedig még későbbre tehető.

A természettudományokban az evolúcióelmélet, de még inkább a statisztikus fizika és a kvantummechanika megjelenésével nyert polgárjogot a valószínűség fogalma a XIX. század végén – XX. század elején, amelyben a véletlent már a tudományos elmélet inherens részeként fogták fel, számos filozófiai vitát gerjesztve ezzel a valószínűség értelmezésével kapcsolatban. A társadalomtudományok determinisztikus modelljeiben is addig szinte kizárólag a tapasztalati adatok kezelésekor használt statisztikai elemzésekben alkalmazták.

A modern értelemben vett *játéktól* elválaszthatatlan *stratégiák* fogalmának megjelenését sokan felfedezni vélik már akár XVIII. századi munkákban is, azonban az első matematikai tétel bizonyítása ezen a területen Ernst Zermelo német matematikus, a halmazelmélet axiomatizálásának egyik vezéralakja nevéhez fűződik 1913-ból. Zermelo a sakkjáték elemzése kapcsán vetette fel a kérdést, hogy hogyan lehetne pontos matematikai formában megfogalmazni a „nyerés”, illetve a „nyerő pozíció” jelenségét egy mai értelemben vett tökéletes információs játékban, illetve nyerő pozícióból hány lépésben lehet kikényszeríteni a győzelmet. Zermelo eredményeit az 1920-as években König Dénes és Kalmár László általánosították; a kevert stratégiákon alapuló egyensúly¹⁵ és ezen keresztül a valószínűség fogalmának játékelméletbe való bevezetése Émile Borel francia matematikus nevéhez fűződik. Borel a kétszemélyes, három, vagy öt lehetséges stratégiát megengedő játékok elemzésekor jutott erre az eredményre, amelyet azzal a sejtéssel egészített ki, hogy ötnél több stratégia esetén valószínűleg nem létezik megoldás. A nagy lengyel matematikustrió (Banach, Ulam és Steinhaus) harmadik tagja, a matematika társadalomtudományi és biológiai alkalmazásai iránt való erőteljes érdeklődése révén, szintén tett erőfeszítéseket a kártyajátékok, a sakk és bizonyos hajózási problémák közös pontos matematikai modelljének megfogalmazására 1925-ben, ahol az egyik szereplő legjobb döntése függ a másik szereplő döntéseitől.

A sok korai kutatás ellenére azonban a játékelmélet legfontosabb alapkövének Neumann János 1928-as cikkét (Neumann 1928) szokás tekinteni, amely a híres minimax tételt tartalmazza kétszemélyes zérusösszegű játékok esetére. Ebben a tanulmányban a szerző – Boreltől függetlenül – belátja, hogy kevert stratégiák alkalmazása esetén, ha véges sok tiszta stratégia lehetséges, akkor minden ilyen játékhoz tartozik egy minden játékos számára individuálisan racionális kifizetési vektor. A megoldás létezésének belátásához Brouwer fixponttételét használja. A már tárgyalt későbbi tanulmányában explicit módon utal is a nyeregpontsztruktúra azonosságára, amelynek hátterében a fixpont matematikai fogalma áll.

15 Ekkor a játékosok minden egyes stratégiát csak bizonyos valószínűséggel választanak.

Hogy honnan származik Neumann érdeklődése a téma iránt, ismét egy homályos pont a Neumann-életműben. Annyi bizonyos, hogy a Hilbert-programmal összesség egy ilyen irányú matematizált, axiomatikus felépítésű társadalomtudományi alapvetés, valamint, hogy több mint 10 évvel később, amikor Princetonban Oskar Morgensternnel találkozott, még mindig foglalkoztatta a téma. Akkor éppen a játékelmélethez kapcsolódó munkáit készült rendszerezni, felhasználva néhány azóta született saját és másoktól származó eredményt. Addigra már 1938-ban Borel tanítványa, Jean Ville, mestere munkáiból kiindulva elemi (nem topológiai) eszközökkel is bizonyította a minimax tételt, azonban Neumann számára továbbra is különösen fontos maradt a nyeregpont, fixpont és konvexitás mély matematikai struktúrája köré csoportosítható tudományos problémák jellegének feltárása.

Oskar Morgenstern (1902–1977) az osztrák iskola hagyományain nevelkedett bécsi közgazdász volt, aki részt vett ugyan mind a Bécsi Kör, mind a Menger-féle matematikai kollokvium összejövetelein, azonban sem filozófus, sem matematikus nem lévén, mindenhol csak egyfajta kívülálló szerepét töltötte be. Így maradt ez Princetonban is, ahova később meghívást kapott, amikor a háború miatt elhagyni kényszerült hazáját. A bécsi összejövetelek hatására fontosnak tartotta érvényesíteni a matematikai szigorú és az új pozitivisták logikát a közgazdaságtanban, azonban alapvetően tévesnek tartotta azt az irányvonalat, amit Hicks és az amerikai matematikus-közgazdászok képviseltek. Morgenstern közgazdasági nézetei hangsúlyozottan egy általánosabb társadalomelmélet részeként jelentek meg, amelyben az individuális döntések mellett kulcsszerepet kaptak a társas interakciók is. Nézete szerint az egyének döntési „maximái” kétféleképpen lehetnek: (1) korlátozatlanok, amelyek esetén a döntés kimenetele független a társadalom többi tagjának döntésétől, és (2) korlátozottak, ahol az egyéni döntés kimeneteleinek korlátot szab a többi szereplő döntése. Egy a pozitívizmus szellemében jó előrejelzésekre képes közgazdasági elmélet szerinte nem hagyhatja figyelmen kívül a korlátozott maximákat, mint ahogy azt a kortárs elméletek tették. Igen fontos szerepet tulajdonított Morgenstern a társadalmi intézményeknek, amelyek egyrészt szintén korlátozzák az egyéni lehetőségeket, meghatározva ezzel a döntési mechanizmusok lehetséges szabályait, másrészt ezek a korlátok gyakran képesek áthidalni azokat az információhiány okozta nehézségeket, amelyekkel a kortárs elméletek eleve nem is számoltak.

Ilyen körülmények között találkozott a szintén Princetonban dolgozó Neumann Jánossal, amikor Eduard Cech cseh matematikus felhívta a figyelmét arra, hogy régi bécsi ismerőse hasonló szemléletű matematikai elméleten dolgozott korábban. Kettőjük között hamarosan szoros együttműködés alakult ki, amely szenvedélyes német nyelven folytatott eszmecserekből bontakozott ki, amelyeknek előfordult, hogy a princetoni tudományos élet más Európából kivándorolt tagjai, például Albert Einstein vagy Niels Bohr is

részesei voltak. Morgenstern „égi ajándéknak” tekintette Neumannt, aki készen hozta számára azt a típusú matematikai szigort, amit ő maga képzettsége híján, saját bevallása szerint képtelen lett volna elméletében megvalósítani. Neumann, megismerve Morgenstern kritikáját, azt ajánlotta, hogy közösen írjanak cikket, amelyben a játékelmélet közgazdasági vonzatait Morgenstern szellemében mutatják be. A cikk tervéből hamarosan cikksorozat, majd egy több mint 600 oldalas könyv lett (Neumann és Morgenstern [1944] 2004), melynek kézírata 1943-ban készült el.

A monumentális mű azon túl, hogy a játék fogalmának első igazi axiomatikus megfogalmazását adja, összefoglalja a játékelmélet területén addig született összes eredményt, részletesen tárgyalja a zérusösszegű és nem zérusösszegű játékok egyensúlyának problémáját az egzisztenciátétel bizonyításával együtt, valamint mindezekre közgazdasági alkalmazásokat is bemutat, azaz számos olyan újdonságot is tartalmaz, amely a matematikai közgazdaságtan alakulásában később igen fontos szerepet játszott. Ezek közé tartozik a konvex halmazok euklideszi térbeli geometriájának részletes összefoglaló tárgyalása, beleértve a mátrixreprezentációval való kapcsolatát és a lineáris programozás elméletében később kulcsszerepet játszó dualitási összefüggéseket. Ebben a könyvben tűnik fel a Neumann–Morgenstern-féle várható hasznosság koncepciója is, amely eredeti szándék szerint a hasznosság mérhetetlen fogalmának első numerikus reprezentációját igyekezett megadni axiomatikus formában, beépítve ezzel a bizonytalanság koncepcióját a hasznosság-elméletbe. A szerzők felvázolták egy kooperatív játékelmélet alapvonalait is – ahol a játék szereplői koalícióra léphetnek egymással, ha ebből magasabb kifizetésük származik –, amely a játékelméletnek később külön kutatási területévé vált.

A könyv fogadtatása igen pozitív volt annak ellenére, hogy a két szerző a kortárs elméletektől meglehetősen idegen alapokra épített. Bár a játékelmélet területén a könyv megjelenését követően jelentős fejlődés ment végbe, ami később óriási hatást gyakorolt a közgazdaságtan alakulására – amint ez több Nobel-díj (John F. Nash, Harsányi János, Robert J. Aumann, Thomas C. Schelling) kiosztásának formájában hivatalosan is elismerésre került –, ahhoz azonban, hogy a stratégiai interakciók elemzésének szemléletmódja bekerüljön a matematikai közgazdaságtan főáramába, még közel húsz évig várni kellett.

Nash 1950-ben megjelent kevesebb mint egy oldal terjedelmű tanulmánya (Nash 1950), amelyben definiálja a híres Nash-egyensúly koncepcióját – a stratégiák egy olyan n elemű vektoraként, amelynek minden eleme az adott szereplő optimális stratégiáját tartalmazza, feltéve, hogy az összes többi szereplő egyensúlyi stratégiát követ –, valamint bizonyítja az egyensúly létezését a kevert stratégiák lehetősége esetén n -szereplős játékokra, egyrészt szinte minden későbbi nemkooperatív játékelméleti munka kiindulópontjának tekinthető, másrészt az általános egyensúlyelmélet felé is ez a tanulmány teremtette meg a közvetlen kapcsolatot. A cikkben Nash tulajdonképpen Neumann

kétszemélyes zérusösszegű játékokra vonatkozó tételét általánosította n szereplő esetére, az eszköz pedig, amit a bizonyításban felhasznált, nem más, mint Kakutani fixponttétele, amely, mint azt már említettük, szintén Neumann fixponttételének egyszerűsített, továbbfejlesztett változata, ezért is tartják Neumann két korábbi munkáját (Neumann 1928, 1938) a matematikai közgazdaságtan döntő fontosságú mérföldköveinek. Maga Neumann egyes források szerint nem becsülte túl sokra a Nash-féle általánosítást, és levelezésében Samuelson könyvéről is fenntartásokkal nyilatkozott, ami talán annak köszönhető, hogy a nemkooperatív megközelítést, amely éppen a stratégiai interakciók lényegét hagyja figyelmen kívül, és amely a matematikai közgazdaságtan kortárs irányzataiban igencsak dominált, alapvetően tévesnek tartotta.¹⁶ Ezt a véleményét azonban Morgenstern kívül akkoriban még kevesen osztották.

EGY KORSZAK VÉGET ÉR

A Cowles Bizottságnál a termelés elméletének szintézisén kívül fontos kutatási terület volt a jóléti problémák matematikai elemzése, és ezzel összefüggésben a fogyasztási elmélet általánosítása és axiomatizálása. Edgeworth és Pareto munkáinak megjelenése óta többen is foglalkoztak ezzel a kérdéssel, és ez volt az a probléma, amely összehozta az általános egyensúlyelmélet lezárásának két vezéralakját, Kenneth Arrow-t és Gérard Debreu-t is.

Kenneth Joseph Arrow (1921–) New Yorkban nőtt fel, és fő érdeklődési területének megfelelően matematikát is ebben a városban kezdett tanulni eleinte a City College-ban, majd a Columbia Egyetemen azzal a szándékkal, hogy később matematikai statisztikával akar foglalkozni. Az egyetemen saját elmondása szerint (idézi Weintraub 1983) arra lett figyelmes, hogy matematikai statisztikával igazából csak két ember foglalkozik, egy közgazdász (Harold Hotelling), valamint egy külső ösztöndíjas asszisztense (Wald Abraham). Csupán emiatt felvette Hotelling egyik matematikai közgazdaságtan kurzusát, ami döntő fordulatot jelentett életében. Már az egyetem alatt megismerkedett Hicks *Érték és tőke* (1978) című könyvével, valamint az általános egyensúly egzisztenciájának megoldatlan problémájával, amelyről meglepődve hallotta, hogy az egyik legfontosabb eredmény ezzel a témával kapcsolatban éppen Waldtól származik. Wald azonban nem nagyon biztatta őt, amikor az általánosítás lehetőségeiről faggatta, mondván, hogy a probléma túl bonyolult, és nem sok eredménnyel kecsegtet. Arrow 1942–1946-ig a légierő meteorológiai részlegénél szolgált, majd 1947-ben került a Cowles Bizottsághoz, ahonnan 1949-ben távozott, és a Stanford Egyetemen kapott állást.

16 Az igazsághoz hozzá tartozik, hogy Nash (1950, 1953) is megfogalmazott egy kooperatív játéknak tekinthető alkumodellt, azonban abban a megoldás létezését egy nemkooperatív játékból vezette le más irányvonalat követve, mint a Neumann–Morgenstern-féle hasznosságátruházási technika.

A Bizottságnál, majd Stanfordban elsőként a jóléti közgazdaságtan alapételeivel, azaz a versenyzői egyensúly és a Pareto-hatékonyság kapcsolatával foglalkozott. A jóléti közgazdasági problémák iránti érdeklődése később is megmaradt, ennek köszönhető másik nevezetes eredménye, PhD kutatási témája, a preferenciák aggregálására vonatkozó Arrow-féle lehetetlenségi tétel (Arrow 1951) is. Arrow kutatásai ezenkívül kiterjedtek a bizonytalanság közgazdaságtanára, a technikai haladás, a gazdasági növekedés és számos más probléma vizsgálatára.

A jóléti közgazdaságtan tételeivel – amelyek szerint egyrészt minden versenyzői egyensúly Pareto-hatékony állapot, másrészt minden Pareto-hatékony állapot lehet bizonyos feltételek teljesülése esetén versenyzői egyensúly – kapcsolatban addig rendelkezésre álló eredmények az egyensúlybeli egyéni optimumok elsőrendű feltételeire építettek. Mivel ugyanis egyéni optimum esetén a helyettesítési határráták mind megegyeznek a költségvetési egyenes meredekségével, ezért egymással is megegyeznek az Edgeworth által bevezetett szerződési görbén vagyunk, amely a Pareto-hatékony pontokat köti össze. Arrow érezte, hogy a differenciálhatóságra épülő feltételek egyrészt túl erősek, másrészt csak lokálisan érvényesek, ezért egy jóval általánosabb, konvex halmazok elméletére épülő megoldást keresett – hivatkozva Neumann, Koopmans, Wood és Dantzig ezen a területen végzett munkásságára –, amely sarokmegoldások és telíthető preferenciák esetén is működik. Arrow a transzformációs halmazbeli elosztásokat vizsgálta, és a konvex halmazok szeparáló hipersíkjainak (Banach–Hahn) tételét felhasználva belátta, hogy egyrészt az egyensúlyi elosztások Pareto-hatékonyak, másrészt pedig, hogy az egyensúlyi elosztások megfelelő konvex halmazának támasztó hipersíkja olyan árvektorokat generál, amelyek a keresletet és a kínálatot egyenlővé teszik, azaz piactisztító árak. Az általános egyensúly hatékonyságához persze szorosan kapcsolódott három másik kérdés: az egyensúly létezése, egyértelműsége és stabilitása. 1951-ben az első probléma megoldásán dolgozott, amikor értesült róla, hogy Chicagóban a Cowlesnál Gérard Debreu is hasonló kérdésekkel foglalkozik.

Gérard Debreu (1921–2004) szintén matematikai tanulmányokat folytatott, mielőtt a közgazdaságtan területére tévedt, azonban pályafutását egészen más hagyományok vezérelték. Franciaországban született, középiskolai és egyetemi tanulmányait is ott végezte – a második világháborúnak és Franciaország feldarabolásának köszönhetően – több különböző városban. Saját bevallása szerint az a néhány év volt tanulmányaiiban a meghatározó, amit a német megszállás alatt tartott Párizs nagyhirű intézményében, az École Normale Supérieure-ben¹⁷ tölthetett. A legnagyobb hatást Henri Cartan, híres francia matematikus órái gyakorolták rá, aki a nevezetes Bourbaki-csoport egyik alapítója volt. A csoport tagjai

17 Ez az az intézmény, ahová Walrast annak idején nem vették fel, állítólagosan matematikai ismereteinek hiányossága miatt.

a matematika klasszikus területeinek szigorú logikai és fogalmi tisztázását tűzték ki célul, majd az eredményeket „Nicolas Bourbaki” álnéven egy olyan könyvsorozatban tervezték megjelentetni, amelynek szigorú logikai rendbe szedett és precíz szimbólumrendszerrel használatos definíciói és tételei az egészen általánostól haladnak a speciális felé. A mai napig működő csoport valóban számos könyvet jelentetett meg, amelyek a modern matematika történetének fontos építőkövei. Debreu életművében a „Bourbaki-szemléletmód” mindvégig meghatározó maradt.

Az egyetem befejeztével 1946–48-ig Debreu egy tudományos kutatóintézetben dolgozott, és ez alatt az időszak alatt fordult érdeklődése a közgazdaságtan felé. Ebben nagy szerepet játszott a később Nobel-díjjal jutalmazott Maurice Allais (1911–) könyve (Allais 1943), amely az általános egyensúly egy sajátos módon formalizált modelljét és a jóléti tételeknek egy az amerikai irodalomtól eltérő megfogalmazását, valamint az optimum másodrendű feltételeire építő bizonyítását tartalmazza.¹⁸

1948-ban Debreu elnyerte a Rockefeller-ösztöndíjat, amely lehetővé tette számára, hogy néhány hónapot a Harvard, a Berkeley és a Columbia Egyetemen, valamint a Cowles Bizottságnál, majd Uppsalában és Ragnar Frisch mellett Oslóban töltsön. Ezen az úton olyan közgazdasági ismeretekkel gyarapodott, amelyeket a matematikában ugyan kiemelkedően magas színvonalat nyújtó, de a matematikai közgazdaságtan sodróvonalából kiszoruló Franciaországban nem kaphatott volna meg. 1950-ben a Cowles Bizottság kutatóállás-ajánlatát elfogadva az Egyesült Államokban folytatta tevékenységét.

Debreu első Cowles-tanulmányában feltárta a fogyasztás és – a koopmanszi rendszert felhasználva – termelés halmazelméleti struktúráját annak érdekében, hogy a versenyzői egyensúly definícióját halmazelméleti alapfogalmakkal ragadhassa meg, majd belássa az ily módon definiált egyensúly Pareto-hatékonyságát. A fogyasztáshoz kapcsolódó kérdések háttérében álló matematikai problémák tisztázását később is folytatta. Ennek a kutatásnak talán a legfontosabb eredménye az először 1954-ben publikált híres *reprezentációs tétel* (Debreu 1954), amely kimondja, hogy minden reflexív, tranzitív, teljes és folytonos preferenciareláció reprezentálható folytonos valós hasznossági indexfüggvénnyel. A tétel végleg tisztázta a nehezen kezelhető bináris preferenciarendezé-

18 Allais Pareto-hatékonyság helyett a „maximális gazdasági hatékonyság” fogalmát használta, de fogalomhasználatáról, módszereiről és céljairól általában is elmondható, hogy nagymértékben eltérnek mind az angolszász, mind a német nyelvű irodalomban alkalmazottól. Ráadásul igen kemény bírálatokat is megfogalmazott az általános egyensúlyelmélet standard irodalmával, konkrétan Debreu-vel és Samuelsonnal szemben (például a termelési halmazok konvexitására vonatkozó feltételeket egyenesen irreálisnak tartja), ezért a Nobel-díjat odaítélő bizottság döntését sokan meglepőnek is találták.

sek és a matematikai szempontból kellemes tulajdonságokkal rendelkező és jól kezelhető hasznossági indexfüggvények kapcsolatát.

1951-ben egymástól függetlenül Arrow Kaliforniában és Debreu Chicagóban is az általános egyensúly létezésének problémáján dolgozott abban az új szemléleti keretben, amely a fogyasztás és termelés elméletének újrafogalmazása után már rendelkezésükre állt. Beszámolójuk szerint (idézi Weintraub 1983) mindketten a nemkooperatív játékok Nash-féle koncepciója, a fixponttétel és a konvex halmazok matematikájának egysítésében látták a megoldást. Arrow már ismerte Wald egzisztenciátételeit, és abban is valamiféle „rejtett” fixpont koncepcióját kereste, Debreu azonban nem, mivel a Wald tételét összefoglaló tanulmány angolul csak 1951 őszén jelent meg 1950-ben bekövetkezett hirtelen halálának emlékére; a Neumann-modellt és Kakutani általánosított fixponttételét viszont mindketten ismerték. Koopmans hívta fel Debreu figyelmét arra, hogy Arrow is hasonló problémán dolgozik, aminek köszönhetően intenzív levelezésbe kezdtek 1952 elején, személyesen azonban csak jóval később találkoztak. Együttműködésük eredménye két tanulmány, amelyek közül az elsőt Debreu (Debreu 1952), a másodikat kettőjük (Arrow és Debreu 1954) neve alatt jegyzik. A közös cikket 1952-ben olvasták fel először az Ökonometriai Társaság konferenciáján, az első tanulmányt pedig az Amerikai Tudományos Akadémia (National Academy of Sciences) eredményei közt vezette elő az akadémia egyik tagja, aki nem volt más, mint Neuman János.

A Debreu-féle cikkben a szerző topológiai eszközök segítségével általánosította Nash egyensúlyfogalmát és egzisztenciátételét egy „általános társadalmi rendszerre” olyan formában, hogy a szereplők által választható „akciók” halmazától csak azt követelte meg, hogy ne üres, konvex, korlátos és zárt halmazok legyenek, valamint tett néhány további megkötést a kifizetési függvényekre vonatkozóan, amelyek a többi szereplő akcióitól is függhetnek. Megmutatta azt is, hogy annak a leképezésnek, amely minden szereplő esetében a többi szereplő egyensúlyi választásaira adott válaszként megadja azokat az akciókat, amelyek az adott szereplő kifizetését maximalizálják, létezik fixpontja, azaz létezik a nashi értelemben vett egyensúly.¹⁹

Az Arrow–Debreu-féle cikkben a szerzők két egzisztenciátételt bizonyítanak, amelyek közül az első szigorúbb feltételek mellett érvényesül. Az első esetben a következő módon definiálják gazdasági modelljüket, amelyben n darab termelő, m darab fogyasztó és r darab áru van. A technológiai feltételeket a koopmansi sémával analóg módon, de a linearitási kikötések elhagyásával adják meg: felteszik, hogy (F1) az egyes termelési egységek (vállalatok) lehetséges termelési terveinek (az n dimenziós euklideszi tér bizonyos \mathbf{y} ,

19 Mivel egy szereplőnek többféle optimális választása lehet ugyanabban a helyzetben, ezért az említett leképezés halmazértékű, tehát a bizonyítás a Kakutani-féle fixponttétel feltételeinek teljesülésén múlik.

vektorai) Y_j halmazairól, hogy konvex, zárt halmazok, és tartalmazzák az origót, azaz nem növekvő a volumenhozadék, és a termelőegységek beszüntethetik a termelést; (F2) az Y aggregált termelési halmazról felteszik, hogy nem tartalmazza a pozitív ortánst, azaz minden termelés igényel valamilyen felhasználást; (F3) az aggregált termelési tevékenységek irreverzibilisek. A lehetséges egyéni fogyasztások (m -dimenziós \mathbf{x}_i vektorok) X_i halmazától (F4) szintén megköveteltek bizonyos konvexitási, zártági és korlátossági tulajdonságokat, az egyéni preferenciákat reprezentáló $u_i(\mathbf{x}_i)$ hasznossági indexfüggvényektől pedig a (F5) folytonosságot, a (F6) monotonitást (nincsen telítési pont) és a (F7) közömbösségi felületek konvexitását. Feltették továbbá, hogy (F8) a fogyasztók rendelkeznek ζ_i indulókészletekkel, amelyekből való fogyasztás után még marad valamilyen mennyiség, amelyet áruba bocsáthatnak a piacon, illetve, hogy (F9) a vállalatok minden profitját felosztják a fogyasztók között (az i -edik fogyasztó részesedését a j -edik vállalat profitjából α_{ij} mutatja).

Ebben a gazdasági rendszerben a $(\mathbf{p}^*; \mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_m^*; \mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*)$ vektorok általános versenyzői egyensúlyt alkotnak, ha

- (1) az egyéni termelési vektorok adottnak vett árak melletti profitmaximalizálásból származnak;²⁰
- (2) az egyéni fogyasztási vektorok adottnak vett árak melletti haszonmaximalizálásból származnak;²¹
- (3) valamennyi \mathbf{p}^* egyensúlyi ár nemnegatív és csak a relatív árak számíthatnak, tehát az árak összege egységnyire normálható;²²
- (4) összességében nem fogyasztanak többet, mint amennyi rendelkezésre áll, és teljesül a Walras-törvény.²³

Arrow és Debreu megmutatták, hogy az F1–F9 feltételekkel definiált gazdaságban létezik a fenti értelemben vett egyensúlyi pont, majd a szerintük „irreális”, pozitív készletekre vonatkozó (F8) feltételt némileg gyengítették a második tételükben, de már a cikk elején rámutattak, hogy valamilyen ehhez hasonló feltétellel szükség van az egyensúly létezéséhez. A bizonyításban definiáltak egy olyan úgynevezett „elvont gazdaságot”, egy játékot, amelyben a fogyasztókon és a termelőkön kívül van még egy absztrakt szereplő, akinek feladata az árak „beállítása”, kifizetése pedig a túlkereslet értéke. Erre a játékra

20 $\mathbf{y}_j^* \in Y_j$ maximalizálja a $\mathbf{p}^* \mathbf{y}_j$ szorzatot minden j esetén, mivel a negatív mennyiségű termelés termelésitényező-felhasználást jelent

21 $\mathbf{x}_i^* \in X_i$ maximalizálja az $u_i(\mathbf{x}_i)$ függvényt a $\mathbf{p}^* \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}^* \zeta_i + \sum_j \alpha_{ij} \mathbf{p}^* \mathbf{y}_j^*$ költségvetési korlát figyelembevételével, ahol az egyenlőtlenség baloldalán a fogyasztásra fordított kiadások, jobboldalán pedig a készletekből és a vállalati profitokból való részesedésből származó jövedelmek összege szerepel

22 $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$ és $\sum_n p_n = 1$

23 $\sum_i \mathbf{x}_i^* - \sum_i \zeta_i^* - \sum_j \mathbf{y}_j^* \leq \mathbf{0}$ és $\mathbf{p}^* [\sum_i \mathbf{x}_i^* - \sum_i \zeta_i^* - \sum_j \mathbf{y}_j^*] = 0$

alkalmazták Debreu társadalmi rendszerekre, mint játékokra vonatkozó egzisztenciátétel, és megmutatták, hogy a játék egyensúlyi pontjai a versenyzői egyensúly minden tulajdonságával rendelkeznek.

Arrow és Debreu munkájától függetlenül, de velük nagyjából egy időben Lionel McKenzie (1919–) szintén kidolgozott egy általános egyensúlyi egzisztenciabizonyítást egy világkereskedelmi modellben (McKenzie 1954), amelyet ugyanazon a konferencián mutattak be először, amelyen az Arrow–Debreu-modellt, és amelynek a struktúrája is igen szoros kapcsolatban állt azzal. Emiatt gyakran beszélnek Arrow–Debreu–McKenzie-féle modellről is az általános egyensúly kapcsán.

McKenzie közgazdásznak tanult Princetonban, és bár hallott Neumann modelljéről, amit maga a szerző mutatott be graduális diákoknak, matematikai előképzettség híján akkoriban sokkal inkább Morgenstern, valamint a nemzetközi kereskedelemmel foglalkozó Frank Graham előadásai tettek rá mély benyomást. Később a háború után Oxfordban tanult Hicks mellett, majd a Duke Egyetemre került 1947-ben. Ott hallott Koopmans tevékenységelemzési modelljéről, és azonnal látta, hogy ahhoz hasonlót szeretne ő is létrehozni Graham külkereskedelmi modelljének feltételrendszerében. Jelentkezett a Cowles Bizottsághoz, és egy teljes évet töltött Chicagóban. Ez alatt az egy év alatt emeltszintű matematikát tanult, és megismerkedett az általános egyensúlyelmélet irodalmával, beleértve Wald és Neumann munkáit is.

McKenzie először a munkamegosztás és a hatékonyság kérdését vizsgálta egy olyan típusú Graham ihlette világkereskedelmi modellben, amely Koopmans tevékenységelemzési keretrendszerében íródott, és amelyben a vállalatok helyett az egyes országokat szerepeltette. 1951-ben, visszatérve a Duke-ra, már az egzisztencia problémája foglalkoztatta. Az általa módosított Graham-modellben a termelési lehetőségek határa és a „társadalmi kereslet” között kapcsolatot teremtő leképezést definiált, majd szintén Kakutani fixponttételét felhasználva bizonyította be az egyensúly létezését.

ÖSSZEGZÉS

Az előző néhány szakaszban megkíséreltük áttekinteni a közgazdaságtan matematikai tudományrá válásának legfontosabb állomásait, és ennek kapcsán részletesen elemeztük az általános egyensúlyelmélet XX. századi történetét, amely a matematizálódási folyamat szíve és lelke. Láthattuk, hogy a különböző filozófiai és metodológiai hatásoknak köszönhetően hogyan tolódott el az érdeklődés fókusza az értékelméleti és egyéb interpretációs problémáktól az elosztási kérdések, a fogalmak matematikai természetű tisztázása és az egyensúly létezésének problémája felé.

Az ismertetett modelleket és egzisztenciátételeket később többen módosították és általánosították, de 1952–54-ben egy korszak lezárult, és sokak szerint egy közel egy évszázados probléma oldódott meg. Láthattuk azonban, hogy valójában ez már régen nem ugyanaz a Walrastól eredő probléma volt. Idő közben a modell, a szemléleti keret, a módszerek és a célok is jelentősen megváltoztak.

Megválaszolatlan maradt viszont két további kérdés, az egyensúly (1) egyértelműségét és (2) stabilitását biztosító feltételek meghatározása. Ezeket szintén Arrow, valamint Block és Hurwicz vizsgálták (Arrow és Hurwicz 1958; Arrow et al. 1959), felhasználva Wald eredményeit, valamint a Samuelson-féle áralkalmazkodási differenciálegyenletet. Kimutatták, hogy a probléma kulcsa mindkét esetben a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája, illetve a termékek közt fennálló általános helyettesíthetőség. Mindkét feltétel biztosítja ugyanis az egyensúly unicitásait, azonban az előbbi csupán lokálisan, az egyensúly kis környezetében biztosítja a stabilitást, az általános helyettesíthetőség viszont globálisan stabil egyensúlyi állapotokhoz vezet. Mindkét feltétel azonban az aggregált túlkeresleti függvényekre vonatkozó megszorításokra épül, és nem az egyéni döntésekre. Sőt később kimutatták, hogy ezeknek a feltételeknek a teljesüléséhez bármilyen egyéni technológiai és fogyasztási halmazok lehetnek a háttérben, azaz egyáltalán nem adható az egyéni döntések szintjén unicitási és stabilitási feltétel úgy, mint ahogy egzisztenciafeltétel. Többen az általános egyensúly kutatási programjának bukását látták ebben az eredményben, mivel kiderült, hogy egy rendszeren belüli problémát nem lehet megválaszolni a módszertani individualizmus metodológiájával.

A fentiekén kívül számos egyéb, külső kritika is érte az általános egyensúlyelmélet szemléletmódját és módszereit az „öncélú matematizálás” miatt, feltételezéseit „irrealitásuk” miatt, következtetéseit „irrelevanciájuk” miatt, és folytathatnánk a sort. Ezek a kritikák több olyan új irányzatot hoztak létre, amelyek a közgazdaságtan bizonyos területeinek alakulását a XX. század második felében más-más irányokba terelték. A kritikák jogosságát nem kívánjuk vitatni, azonban mindenképpen elgondolkodtató kell hogy legyen az a tény, hogy egy a tapasztalattól és igen sokféle metodológiai irányelvtől ennyire távol eső

kutatási terület, mint az általános egyensúlyelmélet, néhány évtized alatt teljesen átforgalmazta a közgazdaságtan módszertanát, intézményi struktúráját és publikációs stílusát, és mindenek eredményeként egy új típusú matematikai tudomány jött létre.

HIVATKOZOTT IRODALOM

- Allais, Maurice (1943): *À la Recherche d'une Discipline Économique*. Imprimerie Nationale.
- Arrow, J. Kenneth (1951): *Social Choice and Individual Values*. Cowles Foundations and Wiley.
- Arrow, J. K. – Block, H. D. – Hurwicz, L. (1959): On the Stability of the Competitive Equilibrium II. In: *Econometrica*, 27.: 82–109.
- Arrow, J. Kenneth – Debreu, Gérard (1954): Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. In: *Econometrica*, 22.: 265–90.
- Arrow, J. Kenneth – Hurwicz, Leonid (1958): On the Stability of the Competitive Equilibrium I. In: *Econometrica*, 26.: 522–52.
- Becchio, Giandomenica (2007): The complex role of Karl Menger in the Viennese economic theory. In: *The Review of Austrian Economics*, 21.: 61–79.
- Bekker Zsuzsa (2000a): A keynesi forradalom. In: *Gazdaságelméleti olvasmányok. Alapművek, alapirányzatok*. Szerk.: Bekker Zsuzsa. Aula Kiadó.
- Bekker Zsuzsa (2000b): A marginalista forradalom. In: *Gazdaságelméleti olvasmányok. Alapművek, alapirányzatok*. Szerk.: Bekker Zsuzsa. Aula Kiadó.
- Blaug, Mark (1978): *Economic Theory in Retrospect*. Cambridge University Press.
- Cassel, Gustav (1918): *Theoretische Sozialökonomie*. CF Wintersche Verlagshandlung.
- Csaba Ferenc (2003): *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén: Válogatott tanulmányok*. Osiris.
- Debreu, Gérard (1952): A Social Equilibrium Existence Theorem. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences*.
- Debreu, Gérard (1954): Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: *Decision Processes*. Szerk.: Thrall, Robert et al. Wiley.
- Gödel, Kurt (1931): Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38.: 173–98.
- Hicks, John R. (1978): *Érték és tőke*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
- Jevons, William Stanley (1871): *The Theory of Political Economy*. Macmillan.
- Kakutani, Shiuzo (1941): A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. In: *Duke Mathematical Journal*, 8.: 457–59.
- Kemeny, J. G. – Morgenstern, O. – Thompson, G. L. (1956): A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. In: *Econometrica*, 24.: 115–35.
- Karinthy Frigyes (1996): *Betegek és bolondok*. Szukits Könyvkiadó.
- Koopmans, Tjalling (1951): *Activity analysis of production and allocation*. Wiley.
- Kurz, Heinz D. - Salvadori, Neri (1995): *Theory of Production: A Long-Period Analysis*. Cambridge University Press.

- McKenzie, Lionel (1954): On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. In: *Econometrica* 22.: 147–61.
- Menger, Carl ([1871] 1881): *Principles of Economics*. New York University Press.
- Mirowski, Philip (1984): A fizika és a 'marginalista forradalom'. In: *Közgazdasági eszmetörténet*. Szerk.: Madarász Aladár. Osiris.
- Nash, John Forbes (1950): Equilibrium Points in N-person Games. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences*.
- Nash, John Forbes (1950): The Bargaining Problem. In: *Econometrica*, 18.: 155–62.
- Nash, John Forbes (1953): Two Person Cooperative Games. In: *Econometrica*, 21.: 128–40.
- Neisser, Hans ([1932] 1990): The wage rate and employment in market equilibrium. In: *Structural Change and Economic Dynamics*, 1.: 141–63.
- Neumann, John (1928): A társasjátékok elméletéhez. In: *Neumann János: Válogatott előadások és tanulmányok*. Szerk.: Lukács Ernőné. KJK.
- Neumann, John (1938): Az általános gazdasági egyensúly egy modellje. In: *Neumann János: Válogatott előadások és tanulmányok*. Szerk.: Lukács Ernőné. KJK.
- Neumann, John - Morgenstern, Oskar ([1944] 2004): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
- Russell, Bertrand ([1903] 1996): *The Principles of Mathematics*. W. W. Norton & Company.
- Samuelson, Paul Anthony (1941): The Stability of General Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics. In: *Econometrica*, 9.: 97–120.
- Samuelson, Paul Anthony (1947): *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press.
- Schlesinger, Karl (1935): Über die produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. In: *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 1933–34. Heft. 6*. Szerk.: Menger, Karl. Springer.
- Screpanti, E. – Zamagni, S. – Field, D. – Kirby, L. (2005): *An Outline of History of Economic Thought*. Oxford University Press.
- Stackelberg, Heinrich (1933): Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels. In: *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4.: 456–72.
- Wald, Abraham ([1936] 1951): On Some Systems of Equations of Mathematical Economics. In: *Econometrica*, 19.: 368–403.
- Walras, Léon ([1874] 1900): *Éléments d'économie politique pure; ou théorie de la richesse sociale*. El Corbaz Lausanne.
- Weintraub, Roy E. (1983): On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930–1954. In: *Journal of Economic Literature*, 21.: 1–39.

- Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis.* (1929): Otto Neurath: *Gesammelte philosophische und methodologische Schriften.* Szerk.: Haller, Rudolf – Rutte, Heiner. Verlag Hölder–Pichler–Tempisky.
- Zalai Ernő (2000): Neumann János: klasszikus vagy neoklasszikus? A közgazdaságtani metodológia metamorfózisa. In: *Székfoglalók, 1995–1998.* V. kötet. Szerk.: Glatz Ferenc. MTA.
- Zeuthen, Frederik (1933): Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination, und ökonomische Qualität. In: *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4.: 1–24.